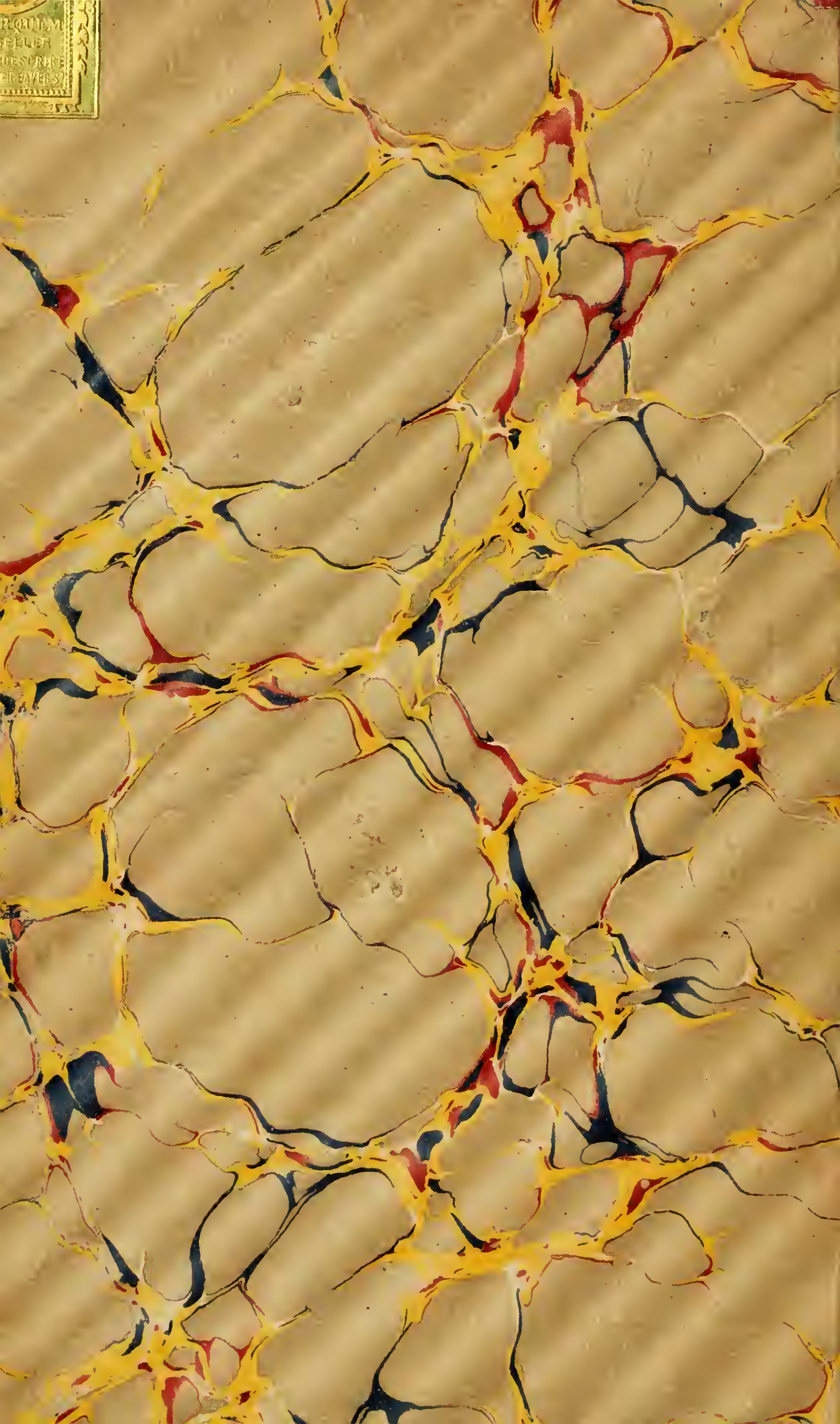
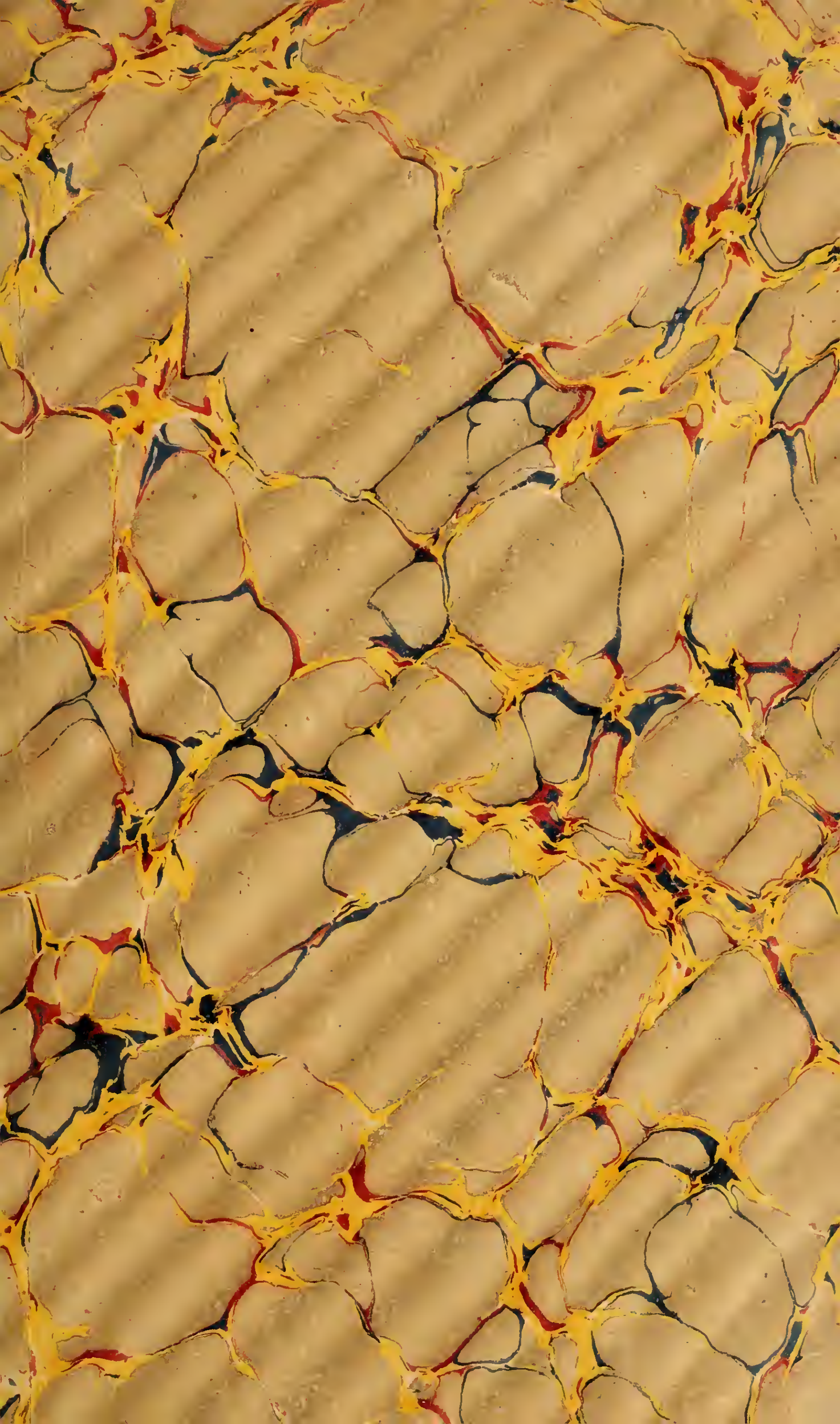

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215261 7





LES NOUVELLES BASES

DE LA

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

(GÉOMÉTRIE DE POSITION)

PAR

A. MOUCHOT,

ANCIEN PROFESSEUR DE L'UNIVERSITÉ,
LAURÉAT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

LES NOUVELLES BASES

DE LA

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

LES NOUVELLES BASES

DE LA

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

(GÉOMÉTRIE DE POSITION)

PAR



A. MOUCHOT,

ANCIEN PROFESSEUR DE L'UNIVERSITÉ,
LAURÉAT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.



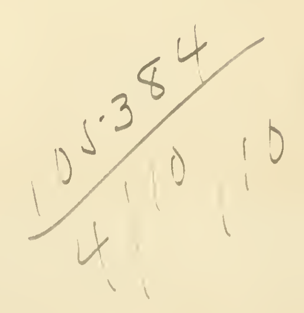
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892



PRÉFACE.

Leibniz, d'Alembert, Carnot, Poncelet n'ignoraient pas combien les Mathématiques pures laissent à désirer, surtout en ce qui concerne les notions élémentaires. Mais nul ne s'est prononcé sur ce point aussi nettement que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*.

Qu'il me soit permis, dit Busset ([1]), de citer l'opinion de Laplace sur les sciences mathématiques. Elle m'a été communiquée par M. Berthevin, son élève et son ami, et porte textuellement :

« Tout ce que l'on peut espérer des bases actuelles a été ressassé et l'on retombera toujours dans la même ornière. Il faudrait refaire la science, la placer sur un nouveau piédestal, en retirer toutes les conséquences, sauf à intercaler les anciens aperçus. On ne peut envisager une théorie sous un nouveau point de vue sans qu'il n'en découle une foule de résultats inattendus. Il serait à désirer que ce fût un homme nouveau qui fût étranger aux mouvements des sciences et n'en connût que les premiers éléments. »

Qui oserait, ajoute Busset, dire après cela qu'il n'y a rien à faire à la science mathématique ?

Laplace ne remarquait évidemment pas que l'homme nouveau dont il souhaitait la venue, l'avait devancé de plus d'un siècle, et que cet homme, au savoir près, était Descartes.

([1]) Busset, *Mémoire sur l'Enseignement des Mathématiques*; 1843 (Paris, Carillan-Gœury).

On doit reconnaître toutefois que la Réforme cartésienne des Mathématiques pures n'était point entièrement accomplie. Après la riche moisson du maître, il restait à glaner. Telle est la tâche que je me suis imposée vers 1860.

Ma première communication à ce sujet est mentionnée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* en date du 17 juillet 1865. Elle a été présentée par le regretté Serret.

Avant d'aller en Algérie poursuivre mes essais d'utilisation industrielle de la chaleur solaire, j'ai publié *la Réforme cartésienne étendue aux diverses branches des Mathématiques pures* (¹).

Dans cet Ouvrage, je m'étais proposé de généraliser à la fois la science de l'étendue et celle des nombres; mais j'avais dû, faute de temps, laisser ma tâche inachevée. J'ai depuis essayé de la mener à bonne fin. Mes communications à l'Académie des Sciences, en 1886 et 1887, n'ont pas eu d'autre but.

Le précis complet que je publie aujourd'hui se résume en peu de mots.

Je commence par doter *a priori* la Géométrie de figures imaginaires, parfaitement distinctes des figures réelles, mais telles qu'on passe aisément des unes aux autres. Je fais voir ensuite que l'Algèbre n'a pas trop de ses divers symboles pour exprimer les rapports mutuels des grandeurs géométriques homogènes, et que ses opérations sont toujours la traduction de celles qu'on effectue sur ces grandeurs. J'établis par là même, entre les deux sciences, une connexion nécessaire, d'où résulte, en particulier, l'accord permanent

(¹) Mouchot, *La Réforme cartésienne étendue aux diverses branches des Mathématiques pures.* Grand in-8; 1876 (Paris, Gauthier-Villars).

de toute figure variable avec la formule générale qui l'exprime : ce qui dispense de fonder la corrélation des figures sur le principe de continuité. J'arrive également, par cette voie, soit à démontrer des théorèmes nouveaux, soit à signaler d'anciennes erreurs adoptées sans discussion. Enfin, malgré sa généralité, la théorie que je propose ne laisse pas de s'accorder avec tous les essais antérieurs du même genre, puisqu'elle comporte, comme autant de cas particuliers, les quantités géométriques d'Argand, les coniques supplémentaires de Poncelet, les figures idéales de Marie et les quaternions d'Hamilton.

Cette extension légitime des Mathématiques pures est en soi fort importante. Elle peut, d'ailleurs, avoir des conséquences d'un autre ordre : car Leibniz, s'inspirant des vues de Descartes, n'a-t-il pas dit :

> Sans les Mathématiques, on ne pénètre point au fond de la Philosophie; sans la Philosophie, on ne pénètre point au fond des Mathématiques; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien.

J'ose donc appeler l'attention des mathématiciens et des philosophes sur ce précis, que je me suis efforcé de rendre élémentaire; et je remercie d'avance ceux qui voudront bien m'adresser, à ce propos, leurs conseils ou leurs critiques.

A. Mouchot.

LES NOUVELLES BASES

DE LA

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Les grands génies de la Science devancent trop leurs contemporains pour en être goûtés. Aussi, d'autant plus méconnus pendant leur vie qu'ils s'élèvent davantage au-dessus de la foule, laissent-ils aux siècles à venir le soin d'apprécier leurs vues et d'en marquer la portée.

Descartes, moins que personne, ne pouvait échapper à cette loi. Son génie impatient devait offusquer jusqu'à ses plus grands disciples. Quant à ses contemporains, ils n'étaient pas doux aux novateurs.

> M. Descartes, qui est mort à Stockholm, en Suède, le 11 février 1650, était un homme de mauvaise mine, qui n'avait rien d'agréable... Il avait bien des visions dans sa tête qui sont mortes aussi bien que lui (1).

Qui parle ainsi? Gabriel Naudé, l'un des oracles de la

(1) *Naudæana*, page 113.

Science officielle de son temps, l'auteur de l'*Apologie des grands hommes faussement accusés de magie.*

Ce n'était là toutefois que dédain ou pitié. La haine harcelait aussi le grand novateur, et devait couver longtemps sur sa tombe.

Quarante-cinq ans après la mort de Descartes, nos pères essayaient encore d'insulter à son génie, mais avec une franchise qui commande l'admiration.

On lit, en effet, dans le *Journal des Savants*, cette annonce :

Histoire de la Conjuration faite à Stockholm contre M. Descartes. In-12, à Paris, chez M. J. Boudot; 1695.

Les qualités, les accidents et les formes substantielles que M. Descartes a rejetées de sa philosophie, sont les terribles ennemis qui ont conjuré sa perte. Quand elle eut été résolue entre eux et qu'il eut été solennellement déclaré novateur, et, comme tel, condamné à être retranché de la société des savants, la chaleur se chargea de l'exécution et agit avec tant de violence dans le corps de ce philosophe, qu'elle y excita une fièvre avec transport au cerveau qui ruinèrent en peu de jours sa santé, sans que toutes les connaissances qu'il avait acquises lui servissent à la conserver. Ce fatal exemple apprend qu'il est plus sûr de suivre les traces des anciens que de chercher de nouvelles routes [1].

Il est bon de se reporter à ces temps déjà lointains pour en juger sainement les hommes et les choses.

C'était une époque de rénovation et, par conséquent, de

---

[1] On peut comparer cette oraison funèbre à celle que l'illustre chimiste Van Helmont s'était attirée, cinquante ans plus tôt, de la part du fameux docteur Guy Patin :

« Van Helmont était un méchant pendard flamand qui est mort enragé depuis quelques mois. Il n'a jamais rien fait qui vaille. J'ai vu tout ce qu'il a fait. Cet homme ne méditait qu'une Médecine, toute de secrets chimiques et empiriques, et, pour la renverser plus vite, il s'inscrivait fort contre la saignée, faute de laquelle pourtant il est mort frénétique. » Guy Patin, *Lettres* (16 avril 1645).

lutte. Mais, si la résistance était vive, le progrès n'en prenait pas moins un merveilleux essor.

Pour ne parler que des Sciences : Kepler trouvait les lois du mouvement des planètes; Galilée fondait la Physique sur l'observation et l'expérience; Van Helmont dégageait la Chimie des langes du grand-œuvre; Harvey découvrait la circulation du sang; Descartes, enfin, dont le génie encyclopédique prenait une large part à toutes ces conquêtes de l'esprit humain, formulait, dans le *Discours de la Méthode,* les principes fondamentaux de la réforme scientifique.

La *Géométrie,* cette première application du nouveau code, allait ouvrir aux Mathématiques régénérées une ère de progrès que nul, excepté son auteur, n'eût osé prévoir. Mais ce qu'il faut admirer dans cette réforme partielle, peut-être autant que son immense portée, c'est la simplicité des moyens employés pour l'accomplir.

Descartes, voulant reconstituer la Mathématique universelle ou la science générale des rapports, commence par interroger l'Analyse ancienne et l'Algèbre des modernes.

Il reconnaît que « la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination. » Il trouve ensuite qu'on a fait de la seconde « un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive. » Puis, de guerre lasse, il se met à considérer les grandeurs les plus simples, les droites, afin d'en étudier les rapports et de les combiner entre eux.

Mais les droites sont des grandeurs continues, c'est-à-dire susceptibles de croître par degrés insensibles; et le nombre, collection d'unités si petites qu'elles soient, ne saurait les suivre dans leurs variations. C'est là le moindre souci de Descartes. Comme l'avait fait Viète, il représente par des lettres les rapports de ces droites à leur unité; et, pour éviter toute chicane, laisse celle-ci parfaitement arbitraire. Les pre-

mières lettres de l'alphabet répondent d'ailleurs aux droites constantes ou données, et les dernières, soit aux droites variables, soit aux inconnues d'un problème.

Pour combiner entre eux les rapports ainsi obtenus, Descartes n'a plus qu'à soumettre les droites aux opérations élémentaires, en ayant soin de laisser subsister les signes mêmes de ces opérations dans l'expression des résultats qu'elles fournissent. C'est ainsi qu'étant données deux droites dont les rapports à l'unité sont a et b, leur somme s'exprime par $a + b$, et leur différence par $a - b$.

Jusqu'à Descartes, le produit ab des mêmes droites représente l'aire du rectangle dont elles forment les dimensions. De même, le produit de trois droites exprime le rapport d'un solide à son unité. Quant au produit de quatre ou d'un plus grand nombre de droites, il cesse d'avoir une signification géométrique.

Pourquoi ce défaut d'homogénéité dans les résultats d'opérations effectuées sur les droites? Les auteurs du temps ne le disent pas, et pour cause.

C'est alors qu'intervient le grand novateur. Accordez-lui comme un principe démontré par Euclide, ou même comme un fait d'expérience, que deux parallèles coupent deux droites concourantes en parties proportionnelles, et l'anomalie disparaît.

Pour Descartes, en effet, le produit ab n'est autre que $\frac{ab}{1}$.

De même, les produits abc, $abcd$, ... se transforment respectivement en $\frac{abc}{1.1}$, $\frac{abcd}{1.1.1}$, ... Et que signifient ces nouvelles expressions? La première $\frac{ab}{1}$ représente une quatrième proportionnelle à trois droites; les autres expriment de même des droites faciles à construire.

De plus, toutes les opérations subséquentes relatives aux droites, la division, l'élévation aux puissances, l'extraction

des racines, s'obtiennent à l'aide de procédés du même genre, c'est-à-dire purement géométriques, sans jamais cesser de donner pour résultats des droites. En sorte que, finalement, tout monôme algébrique représente une droite; tout polynôme de cette nature, une somme de droites; toute équation algébrique à une ou plusieurs inconnues, l'égalité de deux expressions d'une droite, dont il reste à déterminer une ou plusieurs parties.

Ces idées nouvelles étaient assurément simples, accessibles à tous. Mais dire qu'elles se sont imposées sans lutte et qu'elles ont fait immédiatement vibrer toutes les intelligences à l'unisson du génie, ce serait méconnaître l'éternelle histoire du progrès humain.

Quoi qu'il en soit, elles permirent d'abord à Descartes de trancher la question qui forme le principal objet de la *Géométrie*.

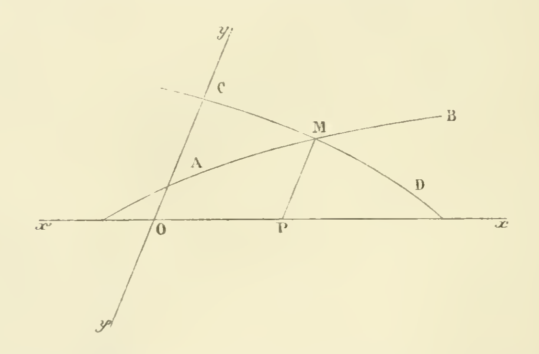
La résolution des équations algébriques de degré quelconque avait bravé les efforts de tous ses devanciers. Viète lui-même, qu'on donne quelquefois comme le rénovateur de l'Algèbre, n'avait couronné son œuvre que par quelques essais de ce genre. Descartes aborde à son tour ce problème ardu. Pour le résoudre, il lui faudra déployer toutes les ressources d'une intelligence d'élite, inventer même une Géométrie nouvelle. Mais il sortira vainqueur de la lutte en imprimant aux Mathématiques pures une impulsion qu'elles attendaient depuis longtemps.

De son clair regard, il a parcouru l'Analyse ancienne. Il en étudie les lieux géométriques; saisit comme d'un bond le principe de cette conception féconde; y voit le moyen de comparer les courbes planes à la droite; reconnaît la possibilité d'exprimer la plupart de ces courbes par des relations algébriques entre deux variables et se trouve dès lors en mesure de résoudre graphiquement l'équation de degré quelconque à une seule inconnue.

Soient, pour le faire voir, AB une courbe plane définie par ses propriétés descriptives ; xx' une direction fixe située dans son plan.

Par l'*origine* O et le point quelconque P pris sur cette direction menons deux parallèles, l'une indéfinie yy', l'autre allant du point P au point M où elle rencontre AB.

D'après la nature de la courbe donnée, quand le point P parcourt xx', il existe évidemment une relation spéciale entre l'*ordonnée* $PM = y$ et l'*abscisse* $OP = x$, variables l'une et l'autre. Dès qu'on peut calculer cette relation à l'aide des opé-



rations élémentaires, la courbe AB devient le *lieu des points dont l'ordonnée est une fonction algébrique $y = f(x)$ de l'abscisse correspondante* et prend en conséquence le nom de *courbe algébrique*.

Toute autre courbe algébrique CD se traduit de même relativement aux *axes de coordonnées* xx', yy', par une équation de degré quelconque $y = F(x)$.

Mais, pour le point M où se coupent les deux courbes, ainsi que pour tous leurs autres points de rencontre, on a

$$f(x) = F(x).$$

De là la possibilité de déterminer graphiquement les racines de cette dernière équation au moyen de deux courbes

auxiliaires convenablement choisies, ces racines étant les abscisses des points communs aux deux courbes.

Descartes parvint de la sorte à résoudre les équations des six premiers degrés, et put en toute assurance terminer sa *Géométrie* par ces mots :

Mon dessein n'est pas de faire un gros livre, et je tâche plutôt de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, si l'on considère qu'ayant réduit à une même construction tous les problèmes d'un même genre, j'ai tout ensemble donné la façon de les réduire à une infinité d'autres diverses, et aussi de résoudre chacun d'eux en une infinité de façons. Puis, outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans en coupant d'un cercle une ligne droite et tous ceux qui sont solides en coupant aussi d'un cercle une parabole, et enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composé en coupant tout de même d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la parabole, il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini. Car, en matière de progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres. Et j'espère que nos neveux me sauront gré non seulement des choses que j'ai expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

Si complète qu'elle parût être, la solution trouvée par Descartes laissait néanmoins subsister une lacune que deux siècles de progrès ne sont pas encore parvenus à combler.

On sait, en effet, que, selon les valeurs de ses coefficients, l'équation générale de degré m à une inconnue comporte tantôt m racines numériques, tantôt moins. Dans le cas où le nombre de ces racines se réduit à n, les formules qui donnaient les $m - n$ racines disparues deviennent symboliques ; mais comme, pour d'autres valeurs des coefficients, elles seraient de nouveau susceptibles de se traduire en nombres, on ne cesse jamais de leur appliquer les règles du calcul algébrique. Force est donc alors d'opérer sur des symboles, tels que $a - b$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, dans lesquels les valeurs de b surpassent

constamment celle de a. Ces deux espèces de symboles peuvent d'ailleurs se simplifier et deviennent les uns, pour $b = a + c$, des *nombres négatifs* de la forme $-c$; les autres, pour $b^2 = a^2 + c^2$, des *expressions imaginaires* de la forme $c\sqrt{-1}$. Enfin, si, dans le système de Descartes, les premières se traduisent par des coordonnées positives ou négatives, les secondes ne peuvent sans ambiguïté s'interpréter de la même manière et n'ont pas encore de rôle à remplir.

Cela posé, lorsqu'une équation de degré m ne comporte que n racines positives ou négatives, on n'en affirme pas moins qu'elle a toujours m racines, mais que n de celles-ci sont *réelles*, tandis que les $m - n$ autres sont *imaginaires*. Puis on admet que les courbes qui servent à déterminer ces racines se coupent en m points, dont n sont réels, $m - n$ *imaginaires* et que l'harmonie la plus parfaite ne cesse jamais de régner entre la science de l'étendue et celle des nombres, quel que soit le degré de l'équation proposée.

Tel est le triple *postulatum*, qui, formulé d'une manière plus ou moins générale et sous des noms divers, sert actuellement de base aux spéculations mathématiques.

On est bien forcé de reconnaître, en se plaçant à ce point de vue, que les constructions de Descartes sont loin de fournir toutes les racines des équations algébriques. Mais est-ce là le dernier mot de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie? Il est permis d'en douter, et rien n'empêche de chercher mieux en s'inspirant au besoin des aperçus lumineux qui se sont fait jour depuis deux siècles.

Dans l'œuvre de Descartes, on a vu poindre une méthode géométrique assez différente de l'Analyse ancienne.

Celle-ci se préoccupe avant tout des propriétés descriptives ou segmentaires des figures et ne daigne pas assez traduire ces propriétés en nombres.

La Géométrie cartésienne, au contraire, se hâte d'exprimer les lignes ou les surfaces par des équations à deux ou trois

variables, puis elle applique à ces équations les ressources du calcul algébrique et finit par en tirer des formules dont la construction la ramène aux figures considérées. Mais elle fait ainsi trop perdre de vue les procédés purement géométriques. Aussi, malgré les services qu'elle a rendus et qu'elle peut rendre encore, ne faut-il pas s'étonner de la voir provoquer le retour aux éléments d'Euclide ou d'Apollonius.

Qu'on ne s'y trompe pas toutefois. Par suite de son commerce avec l'Algèbre, la Géométrie pure a contracté de nouvelles tendances qui suffisent pour la distinguer de l'Analyse ancienne et lui mériter le nom de *Géométrie supérieure*.

En effet, au lieu de renouveler ses démonstrations pour chaque état particulier d'une figure variable, elle se contente désormais de supposer l'une d'elles applicable à tous les autres états de cette figure, même quand certaines parties de celle-ci disparaissent ou plutôt deviennent imaginaires; de plus, elle tient suffisamment compte des relations numériques correspondantes et ne craint pas de recourir à la notion de l'infini. Bref, elle s'efforce d'échapper autant que possible aux reproches mérités que Descartes adressait à l'Analyse ancienne.

C'est à Monge, à Carnot, à Poncelet surtout que cette transformation est due. On peut regretter seulement que, trop fidèles à la manière de voir des anciens, les deux derniers géomètres ne veulent considérer que les éléments absolus des figures. Carnot essaye même de remplacer la conception des droites positives ou négatives par celle des *quantités directes* ou *inverses*. Poncelet, de son côté, persiste à croire avec ce dernier que les signes -1 et $\sqrt{-1}$, pris isolément, ne sauraient dériver *a priori* d'aucune considération purement géométrique. Mais il pense que la Géométrie et l'Algèbre doivent se développer en vertu d'un principe d'extension qui leur est commun et qui n'est pas mieux démontré pour l'une que pour l'autre. Pour tout dire en quelques mots, il

admet, sous le nom de *principe de continuité*, le triple postulatum dont j'ai parlé plus haut. Faute de mieux, ce principe a du moins pour effet de laisser à la science de l'étendue toute son indépendance. C'est ainsi que, pour amener des rapprochements intimes entre la circonférence et l'hyperbole équilatère de même diamètre, Poncelet a soin de consulter. non les équations, mais les propriétés segmentaires des deux courbes. Il observe que, dans chacune d'elles, la demi-corde perpendiculaire au diamètre est moyenne proportionnelle entre les distances de son pied aux deux extrémités de ce diamètre; puis il en conclut que toute perpendiculaire à celui-ci, lorsqu'elle se meut parallèlement à elle-même, intercepte sur la circonférence des cordes *réelles* ou *idéales*, suivant qu'elle rencontre la branche circulaire ou l'hyperbole conjuguée. De là sa belle théorie des *Coniques supplémentaires*.

Moins logique que Poncelet, Chasles adopte à la fois les vues de ce dernier sur les expressions imaginaires et l'introduction en Géométrie des grandeurs positives ou négatives. C'est d'ailleurs en vain qu'il essaye, pour échapper au principe de continuité, d'appuyer ses démonstrations sur les propriétés permanentes des figures et non sur leurs propriétés accidentelles ou contingentes. Car, lorsqu'il détermine, par exemple, deux points d'une droite à l'aide de l'équation

$$x^2 + ax + b = 0,$$

dont il suppose les coefficients réels, n'admet-il pas, en définitive : 1° la permanence des racines de cette équation lorsqu'elles cessent d'être réelles; 2° l'existence sur la droite donnée de deux points imaginaires répondant à ces racines; 3° l'accord de la Géométrie et de l'Algèbre, quelles que soient les valeurs réelles des coefficients a et b? Son *principe des relations permanentes* n'est donc pas autre chose que le principe de continuité changé de forme. Par suite, ses

démonstrations ne sauraient être plus rigoureuses que celles de Poncelet. Elles se distinguent au surplus de ces dernières en ce qu'elles s'appuient davantage sur le calcul.

Enfin, pour utiliser dans le système de coordonnées rectilignes les valeurs imaginaires ou mixtes des fonctions et de leurs variables, M. Marie propose de les interpréter par des droites réelles. Mais il n'obtient de la sorte que des lieux géométriques n'offrant pas l'unité désirable.

Cependant, au cours de ces longues recherches, une idée lumineuse avait lui. Depuis longtemps déjà la comparaison de l'hyperbole équilatère avec la circonférence avait conduit de Moivre à l'importante formule qui porte son nom. C'est très probablement cette formule qui fit entrevoir à Robert Argand la possibilité d'assigner aux droites absolues une nouvelle manière d'être : la *direction*.

Lorsqu'une droite de longueur constante tourne dans un plan autour de son origine, elle est d'abord susceptible d'offrir deux directions opposées. Suivant Descartes, elle est *positive* pour une de ces directions, *négative* pour l'autre, *réelle* dans les deux cas. Dès que la droite prend une direction perpendiculaire aux précédentes, elle change de nature et devient *imaginaire,* indépendamment des sens contraires qu'elle peut encore affecter. C'est à Wallis que semble due cette manière de voir. Enfin, dans toute autre direction, la droite dont il s'agit équivaut, d'après Argand, à la somme des parties, l'une réelle, l'autre imaginaire, d'une brisée rectangle ayant même origine et même extrémité qu'elle. Telle est, dans son ensemble, la conception des *droites dirigées* ou *quantités géométriques.*

De l'aveu d'Argand, cette conception élégante et féconde n'a pas d'autre objet que l'interprétation des symboles algébriques. Mais il s'en faut déjà de bien peu que la Géométrie puisant en elle-même tous les moyens de généralisation qui lui sont nécessaires, ne soit en mesure de les étendre à l'Algèbre.

La direction ne constitue d'ailleurs pas un caractère suffisant d'imaginarité. D'abord elle ne s'entend que des droites. De plus, elle ne saurait se prêter à l'extension du système de coordonnées rectilignes. Enfin, Hamilton a montré que, dans l'expression d'une quantité géométrique, le terme imaginaire peut se représenter par un *vecteur* de direction quelconque.

Il est bon d'ajouter que, pour arriver à cette conclusion, le géomètre anglais part de relations analytiques purement conventionnelles et qu'il tendrait volontiers à faire de l'Algèbre un *calcul de symboles,* conduisant à des résultats plus ou moins susceptibles d'interprétation géométrique.

Nous voilà, par conséquent, bien loin de la Réforme cartésienne des Mathématiques et du but qu'elle se proposait d'atteindre, car, si la Géométrie pure s'est affranchie des entraves de l'Analyse ancienne, l'Algèbre semble vouloir imposer plus que jamais ses conceptions abstraites agrémentées au besoin de symboles dénués de sens.

On conviendra toutefois que les premiers résultats obtenus par Descartes, le parti qu'il a su tirer de l'emploi des droites de sens contraires, les services que n'ont cessé de rendre les quantités géométriques étaient de nature à fixer l'attention des chercheurs.

Je me suis demandé, pour ma part, s'il ne serait pas possible d'assigner aux éléments des figures de nouvelles manières d'être permettant de dissiper toutes les obscurités de l'Algèbre, puis, de généraliser l'Analyse ancienne et celle de Descartes pour en former la Géométrie supérieure.

Tel est le problème que j'étudie depuis trente ans et dont je crois pouvoir aujourd'hui donner une solution complète.

A cet effet, je commence par ne voir dans le système de deux points géométriques, sans liaison mutuelle, qu'un point unique, *réel* quand ses composantes coïncident; *imaginaire* dès qu'elles se séparent l'une de l'autre.

Ces deux manières d'être ou *modes contraires* se trans-

mettent ensuite du point aux segments rectilignes, qui suffisent dès lors pour légitimer toutes les règles du calcul algébrique et compléter le système de coordonnées de Descartes.

Après avoir étudié les variétés de la droite et des coniques rectilignes, j'arrive à constater que deux ou plusieurs courbes de modes convenables, mais de formes différentes, peuvent offrir des propriétés segmentaires identiques et s'exprimer par une seule et même équation. Ce qui me conduit à créer de nouveaux lieux géométriques formés chacun d'une infinité de branches subordonnées à l'une d'elles, puis à soumettre ces courbes générales soit à l'Analyse de Descartes, soit à celle des anciens.

Les aires planes, les angles, les logarithmes, comportent à leur tour deux modes contraires. Quant aux figures de l'espace, elles présentent la même généralité que celles du plan.

La Géométrie pure reçoit donc ainsi toute l'extension désirable. L'Algèbre, de son côté, devient la science générale des rapports entre grandeurs homogènes, et ses opérations découlent naturellement de celles qu'on effectue sur ces grandeurs. Il en résulte, en particulier, que les changements de toute figure variable entraînent comme conséquence ceux des formules correspondantes. En sorte que la *corrélation des figures,* telle que l'entrevoyait Carnot, s'impose d'elle-même et que la résolution complète des équations algébriques est désormais possible.

Enfin, comme les *cordes idéales* de Poncelet, les *coordonnées imaginaires* de Marie, les *quantités géométriques* d'Argand et les *vecteurs* d'Hamilton ne sont jamais que les premières composantes de segments rectilignes tels que je les définis, l'innovation que je propose concilie, en les complétant, tous les essais antérieurs du même genre.

Ai-je besoin d'ajouter que, sans le *Discours de la Méthode* ni la *Géométrie,* je n'eusse jamais entrepris de pa-

reilles recherches. Mon œuvre est donc avant tout un hommage à Descartes, à son mâle génie. D'autres ont déjà signalé sur divers points la puissante initiative du maître. J'apporte ma pierre au monument que lui doit la France.

Un mot encore et j'ai fini.

Von Staudt semble avoir eu le premier l'idée de représenter par un couple de points géométriques les *points doubles* d'une *involution,* lorsqu'ils cessent d'être réels.

Laguerre, dans ses leçons faites en 1870 à la salle Gerson, regarde un point imaginaire comme étant formé par les extrémités d'une droite variable. Quand cette droite s'annule, le point devient réel.

Pour moi, je le répète, j'assigne aux points réels ainsi qu'aux points imaginaires deux composantes absolument indépendantes l'une de l'autre, et les résultats auxquels j'arrive n'en sont que plus généraux.

On ne saurait disconvenir, enfin, que, par ses opérations sur les droites, Descartes n'ait proclamé dans une certaine mesure l'indépendance de la Géométrie et jeté les fondements de la *Graphostatique*. Mais faut-il se lancer éperdument dans cette voie nouvelle et tenter, comme l'a fait Von Staudt, d'affranchir la Géométrie supérieure ou de position de toute idée de grandeur? Faut-il, au contraire, laisser la science de l'étendue et celle des nombres marcher de pair en s'appuyant constamment l'une sur l'autre?

De ces deux méthodes, Descartes a choisi la seconde. C'est également celle que j'adopte comme étant de beaucoup la moins ambitieuse et la plus sûre.

CHAPITRE I.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE. — POINTS DE MODES QUELCONQUES.

Géométrie supérieure.

Les figures de Géométrie peuvent être étudiées sous trois points de vue différents, selon qu'il s'agit de leur forme, de leur expression numérique, ou de leur comparaison soit à la droite, soit au plan. De là, pour elles, trois sortes de propriétés, les unes descriptives, d'autres métriques, les troisièmes segmentaires; celles-ci formant la transition des premières aux secondes.

Les propriétés descriptives des figures tendent à les isoler les unes des autres. Au contraire, leurs propriétés segmentaires ou métriques conduisent à les répartir en groupes naturels où elles peuvent indifféremment affecter deux manières d'être opposées, improprement dites l'une *réelle,* l'autre *imaginaire;* puis à classer entre eux les nouveaux lieux géométriques ainsi obtenus.

La Géométrie supérieure traite de ces dernières figures. Elle leur applique les procédés de l'Analyse ancienne, mais elle ne laisse pas d'emprunter à la Géométrie de Descartes l'expression la plus générale de leurs propriétés métriques.

L'Analyse ancienne, tout en se bornant à l'étude des éléments absolus des figures, n'en découvrit pas moins les propriétés segmentaires des sections coniques et de quelques lieux analogues.

Par un de ces traits de génie que l'histoire des Sciences enregistre avec orgueil, Descartes parvint à conclure de ces mêmes propriétés des équations à deux ou trois variables représentant les lignes planes ou les surfaces et permettant d'étudier ces dernières à l'aide des seules ressources du calcul.

Les deux méthodes sont réciproques l'une de l'autre, puisque la première passe des propriétés descriptives des figures à leurs propriétés segmentaires ou métriques, tandis que la seconde suit autant que possible l'ordre inverse. Il ne faut donc pas s'étonner que la Géométrie supérieure ait pu les concilier, les englober, pour mieux dire, en donnant à chacune l'extension désirable et les complétant l'une par l'autre.

Plus générale que l'Analyse ancienne, elle est à celle-ci ce que l'Algèbre est à l'Arithmétique, c'est-à-dire qu'aux éléments absolus des figures, elle en substitue d'autres qui peuvent affecter deux manières d'être opposées ou *modes contraires,* et qui, pour s'exprimer numériquement, nécessitent l'emploi rationnel de tous les symboles algébriques sans exception.

Plus soucieuse des propriétés de l'étendue et par là même plus féconde que la Géométrie de Descartes, elle met cette dernière en mesure de construire le lieu des équations à deux ou trois variables, quel que soit le mode de ses branches ou de ses nappes, de résoudre graphiquement les équations de degré quelconque à une seule inconnue et de faciliter l'étude des fonctions algébriques ou transcendantes.

En un mot, la Géométrie supérieure embrassant l'Analyse ancienne et celle de Descartes poursuit leur œuvre commune, mais généralise à la fois et ces deux méthodes d'investigation et les figures dont elles s'occupent.

Points de modes contraires.

Il convient, dès le début de la Géométrie supérieure, de généraliser la définition du point, afin d'en conclure une extension remarquable des propriétés segmentaires et métriques des figures.

Outre le point géométrique, tel qu'on le définit habituellement, j'ai proposé d'introduire dans la science de l'étendue deux éléments nouveaux : le *point réel* et le *point imaginaire*.

Chacun d'eux est le système de deux points géométriques ordinaires appelés *composantes*. Suivant que ces composantes, sans liaison mutuelle, sont superposées ou séparées l'une de l'autre, le point résultant est réel ou imaginaire.

La distinction, par chaque espèce de point, d'une *première* et d'une *seconde composante* est indispensable.

Deux points imaginaires sont *conjugués* quand ils sont inversement formés des mêmes composantes : c'est-à-dire quand la première composante de l'un est la seconde composante de l'autre, et réciproquement.

Le point réel ayant ses deux composantes superposées ne se distingue pas graphiquement d'un point géométrique ordinaire ; tandis que le point imaginaire se représente par ses deux composantes et se désigne par une parenthèse renfermant dans le même ordre qu'elles les lettres qui les affectent. Exemple : le point (M, M') et son conjugué (M', M).

J'appelle *modes contraires* les deux manières d'être opposées du point, tel que je viens de le définir. Ces deux manières d'être coexistent sans qu'il soit possible de les confondre et la transition de l'une à l'autre se fait de la façon la plus naturelle.

Les dénominations de point réel et de point imaginaire

sont donc mal choisies, puisqu'elles semblent indiquer qu'une seule des deux manières d'être du point existe réellement. Mais j'ai dû les adopter pour me conformer à l'usage.

Quelque mode qu'il affecte, le point, comme on va le voir, peut toujours engendrer des lignes, des surfaces et des volumes ; en sorte que la dualité qu'il présente est susceptible de s'étendre à toutes les figures géométriques.

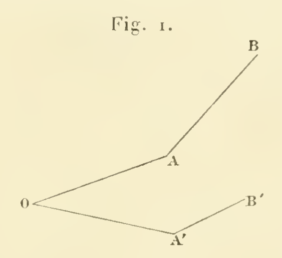
CHAPITRE II.

LIGNE DROITE. — CONIQUES RECTILIGNES.

Ligne droite.

Définitions et propriétés descriptives. — Lorsque les composantes d'un point décrivent, sur un plan, deux droites soit de même direction, soit de directions parallèles ou concourantes, le système de ces droites est un *segment rec-*

Fig. 1.



tiligne dont elles forment les *composantes*. Ces composantes correspondent à celles du point générateur. Leurs origines et leurs extrémités forment l'*origine* et l'*extrémité* du segment rectiligne qui se désigne par ces derniers points.

C'est ainsi que le segment dont l'origine est O et l'extrémité (A, A') (*fig.* 1) s'exprime par O (A, A').

De même, le segment ayant pour origine (A, A') et pour extrémité (B, B') se représente par (A, A') (B, B').

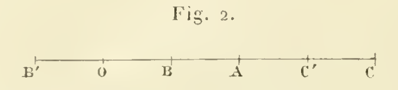
Un segment rectiligne est *simple* quand son origine est réelle ; *disjoint* quand elle est imaginaire.

$O(A, A')$, par exemple, est un segment simple; (A, A') (B, B'), un segment disjoint.

Les divers segments rectilignes se distinguent les uns des autres par la longueur ou l'angle de leurs composantes. Ils sont *isoscèles* ou *scalènes,* suivant que ces composantes ont, ou non, même longueur; *radiés* ou *droits,* suivant que les directions de ces mêmes composantes sont, ou non, concourantes.

Ainsi. OA, $O(B, B')$, $O(C, C')$ (*fig.* 2) sont des seg-

Fig. 2.

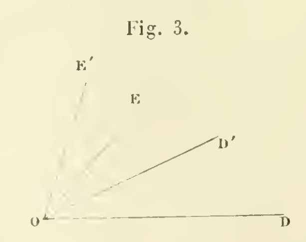


ments droits, les deux premiers isoscèles, le troisième scalène.

De même, $O(D, D')$, $O(E, E')$ (*fig.* 3) sont des segments radiés, l'un scalène, l'autre isoscèle.

On peut abréger la dénomination de segment rectiligne

Fig. 3.



isoscèle en lui substituant celle de segment isorectiligne.

Deux segments rectilignes sont *égaux,* quand, appliqués l'un sur l'autre, ils ont même origine et même extrémité.

Deux segments rectilignes sont *équipollents,* quelle que soit leur origine, lorsque leurs composantes, de même ordre, sont égales, de même sens et parallèles chacune à chacune.

Enfin, deux segments rectilignes sont *inverses* l'un de

l'autre, ou, le premier, *direct*, et, le second, *inverse*, quand ils ont leurs points conjugués deux à deux.

Exemple : O(B, B′) et O(B′, B), O(D, D′) et O(D′, D).

Le mode d'un segment isorectiligne simple ne dépend que de l'angle de ses composantes. Celles-ci peuvent être considérées comme étant de *même sens* tant qu'elles restent superposées ou qu'elles forment entre elles un angle aigu, et de *sens contraires*, quand cet angle est obtus ou qu'elles sont opposées l'une à l'autre. Le segment isorectiligne est dit *réel*, dans le premier cas; *imaginaire*, dans le second.

D'après cela, changer le mode d'un segment isorectiligne, c'est intervertir le sens d'une de ses composantes. Mais, afin de procéder avec ordre, il convient d'opérer toujours sur la première composante du segment donné, puis de prendre la seconde, qui reste fixe, pour première composante du nouveau segment.

C'est ainsi que, par des changements de mode successifs, le segment droit réel-positif OA (*fig.* 4) se transforme

Fig. 4.

d'abord en un segment imaginaire positif O(A, A′), puis en un segment réel négatif OA′, puis en un segment imaginaire négatif O(A′, A), pour revenir ensuite à son premier état.

Des opérations analogues font prendre au segment isoradié réel-positif O(A, A′) (*fig.* 5) les formes successives O(A′, A″), O(A″, A‴), O(A‴, A), O(A, A′), ...

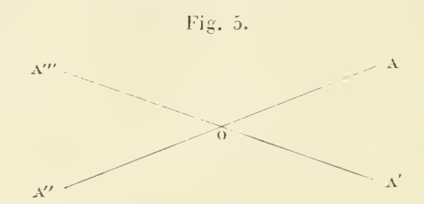
Dans les mêmes conditions, le segment O(A′, A), inverse de O(A, A′), devient d'abord O(A, A‴), puis O(A‴, A″), O(A″, A), ...

D'où il suit que deux segments inverses l'un de l'autre conservent ce caractère dans toutes leurs transformations.

J'appelle *cycle* l'ensemble des quatre manières d'être différentes que peut affecter un segment isorectiligne, et *directions* du cycle celles des composantes du segment. Ces directions se réduisent d'ailleurs à une seule pour le cycle droit.

Un cycle isoradié a de plus pour *axes* les bissectrices des angles formés par ses directions. L'axe répondant au segment

Fig. 5.



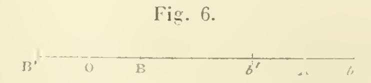
réel-positif du cycle en sera dit l'*axe principal* ou simplement l'*axe*.

Le segment *isorectangle* ou dont les composantes sont égales et perpendiculaires entre elles est indifféremment réel ou imaginaire. Mais, dès qu'on le suppose réel-positif, il est susceptible d'engendrer un *cycle isorectangle*.

Lorsque deux cycles isorectilignes ont même origine et mêmes directions, sans que leurs points soient conjugués deux à deux, les segments qui les composent sont dits *homogènes*.

Pour additionner deux segments homogènes, il suffit de

Fig. 6.



mener par l'extrémité du premier un segment équipollent au second. La *somme* ainsi obtenue est homogène à chacune de ses parties. De plus, elle peut se représenter dans tous les cas par le segment rectiligne ayant même origine et même extrémité qu'elle.

C'est ainsi qu'étant donnés (*fig.* 6) les segments droits

OA, OB, O(B, B'), si, par l'extrémité A du premier segment on mène les équipollents Ab. A(b, b'), des deux autres il vient

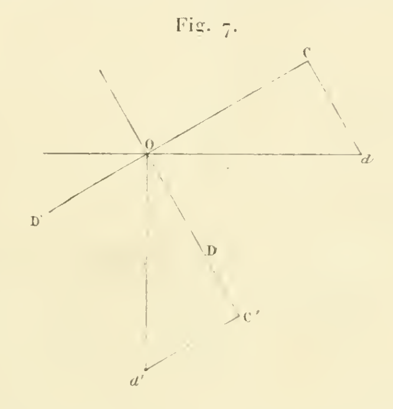
$$Ob \doteq OA + OB,$$
$$O(b, b') \doteq OA + O(B, B').$$

De même, les segments isorectangles O(C, C'), O(D, D') (*fig.* 7) ont pour somme

$$O(d, d') \doteq O(C, C') + O(D, D').$$

L'égalité des triangles OCd, OC'd' montre, dans ce der-

Fig. 7.



nier cas, que le *segment mixte* O(d, d') est isorectangle. En général, un segment radié mixte est scalène.

Lorsque les parties de la somme qu'il représente viennent à changer simultanément de mode, un segment mixte subit des transformations identiques à celles qu'on obtiendrait en changeant alternativement le sens de ses composantes. Le nouveau cycle qu'il engendre de la sorte peut s'appeler *mixte*.

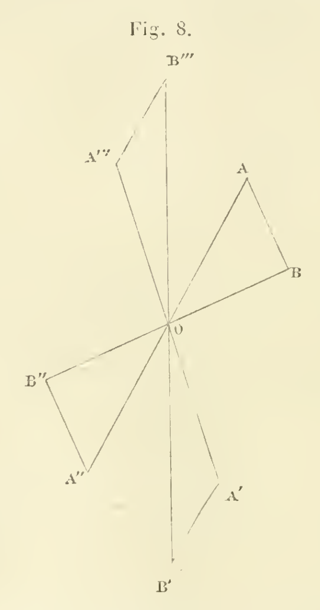
Ainsi, le segment mixte

$$O(B, B') \doteq O(A, A') + (A, A')(B, B')$$

(*fig.* 8), dont les parties changent ensemble de mode, engendre le cycle radié mixte OBB′B″B‴.

A moins d'être isorectangle, un pareil cycle ne renferme que des segments scalènes. Ces derniers, suivant qu'ils sont entre eux de même mode ou de modes contraires, ont des angles égaux ou supplémentaires compris entre compo-

Fig. 8.



santes de même ordre directement ou inversement proportionnelles.

L'ensemble de tous les segments rectilignes homogènes groupés dans un plan autour d'un même point forme, dans le sens le plus général du mot, une *ligne droite* ayant ce point pour *origine*.

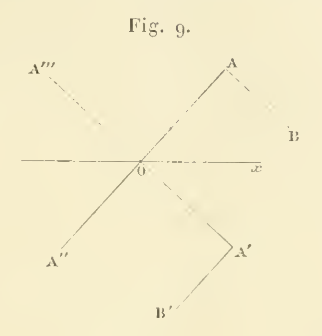
L'ensemble des segments inverses des premiers constitue la *droite inverse* de la première.

Une droite est dite *radiée* ou *réelle,* suivant que les segments dont elle se compose sont radiés ou droits.

La *droite rectangle* est une variété de la radiée. Elle ne comporte que des segments isorectangles, c'est par elle que nous commencerons l'étude de la droite.

Soit O(A, A′) (*fig.* 9) un segment rectangle réel-positif.

Fig. 9.



Il détermine un cycle OAA′A″A‴ ayant Ox pour axe principal.

Les quatre segments O(A, A′), O(A′, A″), O(A″, A‴), O(A‴, A) font partie d'une droite rectangle dont le point O est l'*origine réelle*.

Lorsqu'ils viennent à croître indéfiniment, sans que leurs composantes cessent d'être égales, ces quatre segments se transforment en quatre *branches isorectangles*. Celles-ci font encore partie de la droite en question. Elles en forment le *premier système*.

Si l'on prend, dans ce premier système, deux segments quelconques de modes contraires entre eux, leur somme est, comme on sait, un segment isorectangle mixte. Celui-ci détermine un cycle de même nature, puis un *système mixte* ou *conjugué du premier*. D'où l'on voit, sans aller plus loin, que la droite rectangle se compose d'une infinité de systèmes partant de son origine réelle et subordonnés à l'un d'eux. Elle est d'ailleurs complètement déterminée par le segment réel-positif O(A, A′) ou par la branche correspon-

dante. Celle-ci se nomme en conséquence la *tige* de la droite rectangle et lui donne ses axes.

Ajoutons que chaque branche de la droite proposée peut être prise au besoin pour *tige secondaire* et fournir ainsi tous les autres points de cette droite.

Enfin, ce n'est pas seulement autour de l'origine O que les points de la droite O(A, A') se répartissent en une infinité de branches isorectangles. Car tout autre point de cette droite est susceptible de devenir l'*origine imaginaire* d'une infinité de branches du même genre.

En effet, si, d'un point quelconque (A, A') de la droite proposée, on mène l'équipollent (A, A') (B, B') d'un segment isorectangle quelconque issu de l'origine O, le point (B, B') fait nécessairement partie de cette droite. Et, réciproquement, le segment (A, A') (B, B') mené par le point (A, A') et le point quelconque (B, B') de celle-ci ne saurait être que l'équipollent d'un des segments isorectangles partant de l'origine O.

Donc, le point imaginaire (A, A') est l'origine d'une infinité de branches disjointes équipollentes à celles dont l'origine est réelle. Et l'on peut en dire autant de tous les autres points de la droite rectangle.

Comme on est libre en outre d'adopter pour tige secondaire une quelconque des nouvelles branches, on en conclut que :

Chaque point d'une droite rectangle et chaque branche issue de ce point peuvent, à l'occasion, jouer le même rôle que l'origine réelle et la tige de cette droite.

Nous n'aurons guère qu'à répéter pour la droite radiée ce qui vient d'être dit de la droite rectangle.

Le segment isoradié O(A, A') (*fig.* 10) engendre d'abord un cycle isoradié dont l'axe principal est Ox, puis un *premier système* de même nature.

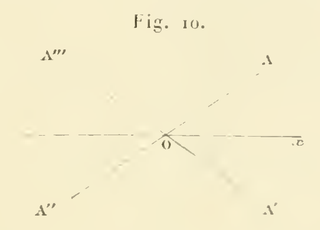
La somme de deux segments de modes contraires appartenant à ce premier système donne ensuite un segment radié

mixte. Celui-ci détermine à son tour un cycle radié dont les segments scalènes peuvent croître indéfiniment sans que leurs composantes cessent d'être proportionnelles : et l'on obtient de la sorte un *système radié mixte*.

De là la possibilité de construire autour de l'origine O, d'abord un premier système isoradié, puis une infinité de systèmes radiés mixtes conjugués de celui-ci.

L'ensemble de tous ces systèmes constitue la droite radiée,

Fig. 10.



dont l'origine réelle est O, la tige O(A, A') et l'axe Ox.

Cette droite comporte d'ailleurs autant d'origines imaginaires que de points de cette espèce, autant de tiges secondaires que de branches issues de ces mêmes points.

Il ne reste plus qu'à dire quelques mots de la droite réelle.

Tout segment droit réel-positif OA détermine un cycle isoscèle; puis un *premier système droit* du même genre.

La somme de deux segments de modes contraires pris dans ce premier système donne ensuite un segment, puis un *cycle droit mixte*. Les quatre segments d'un pareil cycle sont d'ailleurs scalènes et peuvent croître indéfiniment sans que leurs composantes cessent d'être proportionnelles. Le cycle se transforme alors en un *système droit mixte*, et rien n'empêche de concevoir, à partir de l'origine réelle O, une infinité de systèmes analogues ayant, comme le premier, pour direction OA.

L'ensemble de tous ces systèmes est une droite réelle, et

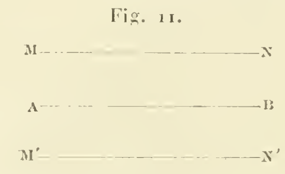
chaque point de celle-ci peut être l'origine d'une infinité de systèmes du même genre.

Enfin, lorsqu'un point imaginaire a ses composantes symétriques par rapport à une droite réelle, il peut décrire une infinité de segments équipollents à ceux de la droite. L'ensemble de ces nouveaux segments forme encore une droite réelle qui se nomme *disjointe* et dont la première droite est l'*axe*.

Ainsi (M, M') (N, N') (*fig.* 11) est une droite réelle disjointe ayant pour axe AB.

Les droites radiées et réelles peuvent évidemment se dé-

Fig. 11.

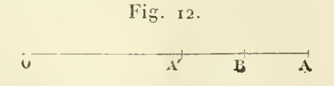


duire de la droite rectangle en projetant celle-ci, d'une part, sur un plan quelconque passant par son axe principal, d'autre part, sur cet axe même. De là les services que sont appelées à rendre, dans les applications, ces propriétés projectives.

D'après ce qu'on a dit plus haut, une droite est donnée par deux quelconques de ses points. Mais, lorsque ces points déterminent un segment mixte de la droite, il importe de savoir trouver immédiatement la somme isorectiligne correspondante.

Soit d'abord le segment droit mixte $O(A, A')$ (*fig.* 12).

Fig. 12.



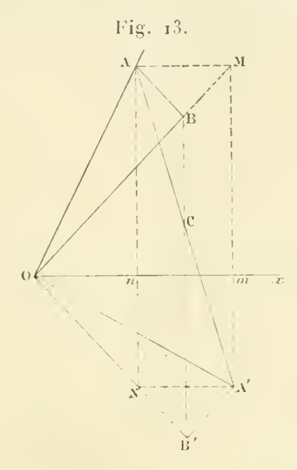
Si l'on prend le milieu B de l'intervalle AA', il vient immédiatement

$$O(A, A') = OB + B(A, A').$$

Considérons, en second lieu, le segment mixte isorectangle $O(A, A')$ ayant pour axe Ox (*fig.* 13).

Si, par les points A et A′ on mène à Ox des parallèles et des perpendiculaires qui se rencontrent en M et N, puis que, du milieu C de AA′, on abaisse sur ce même axe une per-

Fig. 13.



pendiculaire qui coupe OM en B, ON en B′, et qu'enfin on joigne AB, A′B′, on reconnaît sans peine, grâce à l'égalité des triangles OAn, $OA'm$, que $O(B, B') + (B, B')(A, A')$ est la somme isorectangle représentée par $O(A, A')$.

Observons d'ailleurs que, si l'on projette la figure sur un plan quelconque passant par l'axe Ox, la projection de $O(A, A')$ est un segment radié scalène; celle de $O(B, B')(A, A')$ la somme isoradiée répondant à ce dernier segment, et celle du rectangle AMA′N un autre rectangle dont les côtés ne cessent pas d'être perpendiculaires ou parallèles à Ox. D'où la possibilité d'opérer sur le segment scalène, comme on l'a fait sur le segment isorectangle, en vue d'obtenir la somme isoscèle équivalente.

Soit, en dernier lieu, le segment radié scalène $O(A, A')$ (*fig.* 14).

Pour ramener ce cas au précédent, il faut d'abord prouver que $O(A, A')$ est la projection sur le plan de la figure d'un segment isorectangle mixte, puis, trouver les axes communs aux deux segments.

Menons, en conséquence, à la droite AA', par son milieu M, la perpendiculaire $MB = MA$; puis décrivons la circonférence ayant son centre sur la direction AA' et passant par

Fig. 14.

les points O et B. Les intersections de cette courbe avec la direction AA' déterminent les droites rectangulaires OC, OD. Et l'on a de plus par construction

$$\overline{MA}^2 = CM.MD.$$

Cela posé, la circonférence décrite sur OC comme diamètre coupant en M_1 la perpendiculaire Mm à Ox, tirons CM_1 qui rencontre OD en D_1 et les perpendiculaires Aa, $A'a'$, à Ox, l'une en A_1, l'autre en A'_1. Il vient dès lors

$$\frac{MA}{M_1A_1} = \frac{CM}{CM_1} = \frac{MD}{M_1D_1};$$

et l'on en conclut immédiatement

$$\overline{M_1A_1}^2 = CM_1.M_1D_1.$$

Mais le triangle rectangle OCD_1 donne

$$\overline{OM_1}^2 = CM_1 . M_1 D_1 .$$

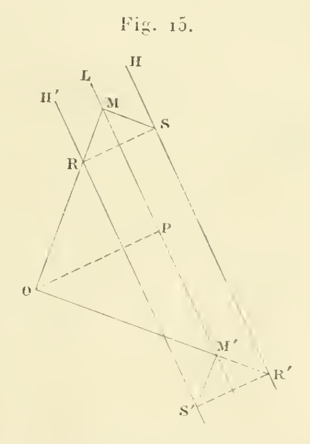
Donc $OM_1 = M_1 A_1$. D'où il suit que $O(A_1, A'_1)$ est le rabattement sur le plan de la figure, du segment isorectangle ayant $O(A, A')$ pour projection sur ce plan et que OC, OD sont les axes communs aux deux segments.

Intersections de deux droites. — Deux droites situées dans le même plan se coupent toujours en un point. Lorsque ce point est à l'infini, les deux droites sont parallèles.

L'intersection de deux droites résulte souvent de leur tracé. Mais, dans certains cas, on ne l'obtient qu'à l'aide de constructions plus ou moins simples.

S'agit-il, par exemple, de trouver l'intersection de la

Fig. 15.



droite rectangle O et de la droite réelle L (*fig.* 15)?

Après avoir mené la droite OP perpendiculaire à L, on la rabat sur cette dernière droite suivant PM, PM'; et (M, M') est évidemment le seul point commun aux deux droites.

Pour trouver l'intersection de la même droite rectangle

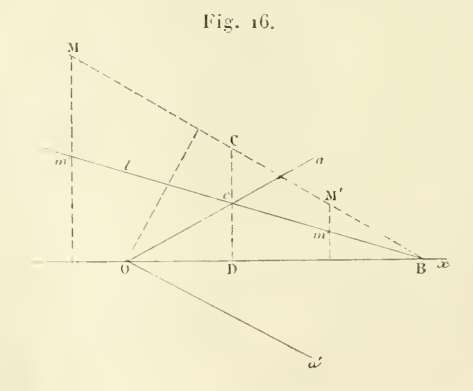
avec la disjointe (H, H′) dont l'axe est L, on note les points R et R′ où les composantes de la branche O(M, M′), conjuguée de L, coupent l'une H′, l'autre H. Par ces points on mène les parallèles RS, R′S′ à OP jusqu'à leur rencontre en S et S′ avec les composantes opposées de la disjointe; et (S, S′) est le point cherché. Car il fait partie de cette disjointe en même temps qu'il forme l'extrémité de la somme mixte O(M, M′) (S, S′) appartenant à la droite rectangle donnée.

On doit observer ici que, tant que l'axe L de la disjointe reste parallèle à lui-même, le point auxiliaire (R, R′) ne cesse pas d'avoir ses composantes sur celles de O(M, M′).

En projetant la figure précédente sur un plan quelconque passant par l'origine O de la droite rectangle, on en conclurait le moyen de trouver l'intersection d'une droite radiée et d'une droite réelle simple ou disjointe. Mais on peut simplifier ces constructions de la manière suivante :

Soit O(a, a') (*fig.* 16) la tige d'une radiée ayant pour axe

Fig. 16.



Ox et dont on cherche l'intersection avec une droite réelle l coupant cet axe en B.

Comme O(a, a') et l sont les projections respectives de deux droites situées dans un même plan, l'une rectangle d'origine O, l'autre réelle et coupant Ox en B, la question

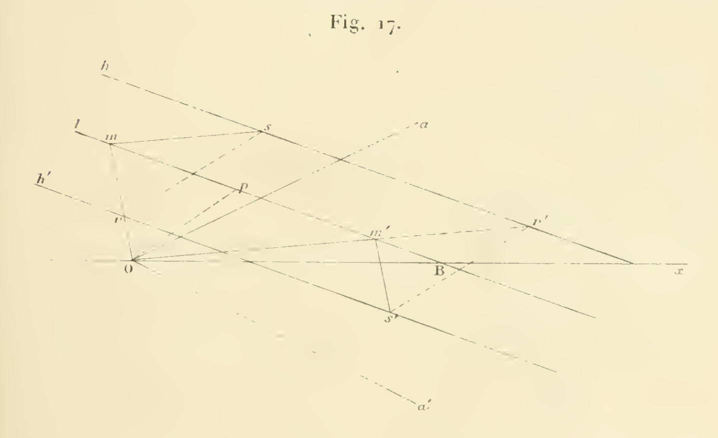
revient à trouver le rabattement de cette dernière droite sur le plan de la figure.

Or, si, par l'intersection c de Oa et de Bl, on mène cD perpendiculaire à Ox, Dc est la projection d'une droite DC = DO du plan de la droite rectangle. Par suite, en prenant sur Dc la longueur DC = DO et tirant BC, on a le rabattement cherché.

L'intersection de BC avec la droite rectangle d'origine O étant (M, M'), il ne reste plus, pour résoudre la question proposée, qu'à mener de ce point une disjointe perpendiculaire à Ox. Car l'intersection (m, m') de cette disjointe avec Bl est aussi celle de Bl et de la radiée O(a, a').

Pour trouver de même l'intersection de la radiée O(a, a')

Fig. 17.



et de la disjointe (h, h') (*fig.* 17) dont l'axe est Bl, il faut déterminer d'abord l'intersection (m, m') de la radiée avec cet axe, puis noter les points r, r', où les directions Om, Om' coupent l'une h', l'autre h; enfin, mener à la médiane Op du triangle Omm' les parallèles rs, $r's'$, jusqu'à leur rencontre en s et s' avec les composantes opposées de la disjointe; et le point (s, s') est, comme on le démontrerait aisément, l'intersection cherchée. Il suffirait même, pour obtenir

cette intersection, de mener les parallèles ms, $m's'$, l'une à Om', l'autre à Om.

Remarquons encore ici que, tant que l'axe de la disjointe proposée reste parallèle à lui-même, le point auxiliaire (r, r') ne cesse pas d'avoir ses composantes sur celles de même ordre de la branche $O(m, m')$, conjuguée de cet axe.

De cette remarque et d'une autre pareille, faite plus haut, résulte le moyen de trouver l'intersection de deux droites rectangles ou radiées.

En effet, cette intersection, ne pouvant être qu'imaginaire, est le point de concours d'une droite réelle et d'une infinité de disjointes. Or, si l'on se donne la direction d'une de celles-ci, les branches des deux droites conjuguées de cette direction déterminent par l'intersection de leurs composantes de même ordre le point auxiliaire dont on vient de parler, et de la connaissance de celui-ci résulte celle du point demandé.

C'est du reste ce qu'on verra mieux par un exemple.

Soit donc $O(a, a')$ (*fig.* 18) une radiée quelconque ayant pour axe Ox, dont on veuille trouver l'intersection avec la droite rectangle O', par exemple.

Parmi les disjointes passant par l'intersection demandée, il est évidemment préférable de prendre pour inconnue celle dont la direction est perpendiculaire à Ox, puisque la branche de la radiée O conjuguée de cette direction se trouve être $O(a, a')$.

La branche correspondante de la droite rectangle O' ayant son axe parallèle à Ox est $O'(A, A')$.

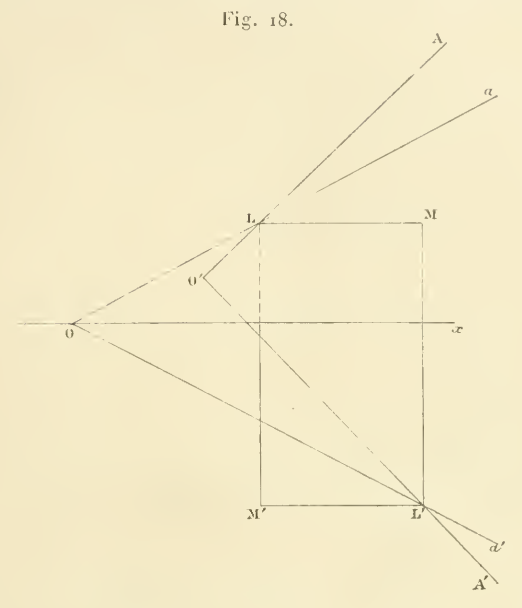
Quant au point auxiliaire d'où dépend la solution du problème, il a ses composantes sur celles de même ordre des deux branches $O(a, a')$, $O'(A, A')$: et, comme celles-ci se coupent respectivement en L et L', ce point n'est autre que (L, L').

On n'a donc plus qu'à mener par (L, L') deux disjointes, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à Ox, pour obtenir, par l'intersection de leurs composantes d'ordre inverse, le point cherché (M, M').

Deux radiées sont parallèles quand leurs tiges sont équipollentes.

Deux radiées sont perpendiculaires entre elles lorsque les

Fig. 18.



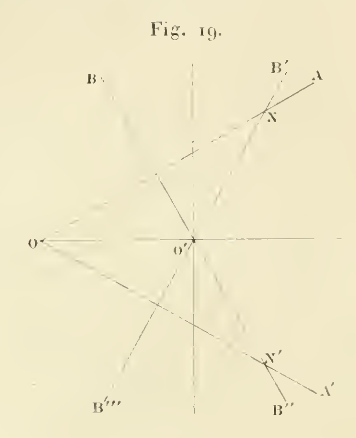
composantes de même ordre de leurs tiges se coupent à angle droit.

Étant donnée par exemple la tige O(A, A') (*fig.* 19). Si du point O' pris pour plus de simplicité sur son axe Ox, on mène les perpendiculaires O'B à OA, O'B' à OA', la droite O'(B, B') est perpendiculaire à O(A, A'). Le pied de la première droite sur la seconde est d'ailleurs (N, N').

On peut remarquer ici que, pour deux segments radiés de modes contraires, perpendiculaires entre eux, tels que O(A, A'), O'(B', B''), ce sont les composantes d'ordre inverse qui se coupent à angle droit; tandis que le contraire a lieu pour deux segments de même mode, tels que O(A, A'), O'(B, B').

A cet examen rapide des propriétés descriptives de la droite doit naturellement succéder celui de ses propriétés segmentaires et métriques. Mais il faut auparavant mesurer

Fig. 19.



les segments droits, conclure des opérations qu'ils comportent toutes celles de l'Algèbre et généraliser le système de coordonnées de Descartes.

Mesure des segments droits. Définition des opérations algébriques. — Pour mesurer les segments rectilignes, il convient de commencer par les segments droits, qui sont les plus simples et qui servent à mesurer tous les autres.

L'unité de cette espèce présente, comme on l'a vu, quatre manières d'être distinctes.

Elle peut être réelle-positive comme OA; imaginaire-positive comme O(A, A′); réelle-négative comme OA′; imaginaire-négative comme O(A′, A) (*fig.* 4).

Les rapports de ces quatre manières d'être à la première se traduisent respectivement par les nombres 1 ou $+1$, i, -1, $-i$, qui se trouvent dépendre ainsi les uns des autres comme les grandeurs qu'ils expriment.

Lorsque le segment droit pris pour unité vient à croître

d'une manière continue, quel que soit le sens ou le mode qu'il affecte, il engendre tous les multiples de cette unité ou d'une de ses parties aliquotes, ainsi que les segments incommensurables avec elle.

Ces diverses grandeurs s'expriment ensuite par la valeur positive ou négative de leur première composante, lorsqu'elles sont réelles, et par cette même valeur affectée de la lettre i lorsqu'elles sont imaginaires. De là l'ensemble des *nombres de signes* et *de modes contraires*.

La *somme* ou la *différence* de deux nombres est la valeur numérique de la somme ou de la différence des segments qu'ils expriment.

La valeur de tout segment mixte, en particulier, est la somme des valeurs de ses parties de modes contraires et cette somme est irréductible.

Changer le sens ou le mode d'un segment droit, c'est multiplier ce segment par -1 dans le premier cas, par i dans le second. D'où la possibilité de représenter le segment OA par $-$OA ou par OAi, suivant qu'on en intervertit le sens ou le mode.

Lorsqu'on multiplie un segment droit par -1 ou par i, le résultat et sa valeur numérique s'appellent respectivement le *produit par* -1 ou *par* i du segment en question et du nombre qui l'exprime.

De là les règles soit de la multiplication, soit de la division d'un segment par un nombre, ou d'un nombre par un autre.

La définition des puissances ou des racines des nombres ne subit d'ailleurs aucun changement, tant que les exposants de ces puissances ou les indices de ces racines ne sont pas imaginaires.

Enfin, comme les produits successifs de $+1$ par i sont i, -1, $-i$, $+1$, on en conclut les relations

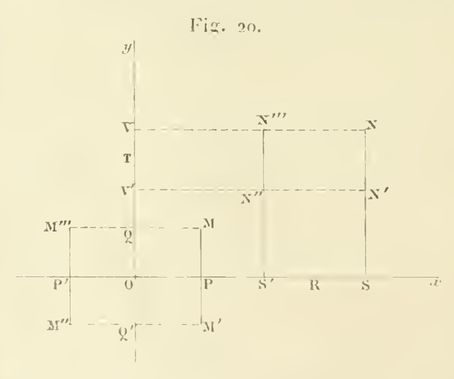
$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = +1, \qquad \ldots,$$

qui, tout en reliant l'une à l'autre les valeurs numériques des diverses manières d'être de l'unité linéaire, prouvent, en particulier, l'identité des nombres i et $\sqrt{-1}$.

C'est ainsi que l'Algèbre, affranchie des symboles dénués de sens et des règles conventionnelles qui l'ont déparée si longtemps, cesse d'être « un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive », et devient, comme le voulait Descartes, la Mathématique universelle ou la science générale des rapports. Il est vrai que, pour atteindre ce but, on a dû s'écarter un peu de la route tracée par le grand novateur. Mais, comme on le verra plus loin, les segments rectilignes de modes quelconques n'en sont pas moins susceptibles des mêmes opérations graphiques que les droites ordinaires.

Généralisation du système de coordonnées de Descartes. — Si l'on trace sur un plan deux *axes rectangulaires* xx',

Fig. 20.



yy', se coupant à l'*origine* O (*fig.* 20), puis que, par un point géométrique M de ce plan, on mène des parallèles aux axes, de manière à construire le rectangle OPMQ, la position du point M est déterminée par les droites OP, OQ, nommées l'une *abscisse*, l'autre *ordonnée* du point.

Mais, à ne considérer que les valeurs absolues de ces

coordonnées, on ne saurait dire auquel des angles formés par les axes appartient le point M.

Afin de lever cette difficulté, Descartes regarde l'abscisse ou l'ordonnée d'un point comme positive, lorsqu'elle est de sens Ox ou Oy; comme négative, lorsqu'elle est de sens Ox' ou Oy', et parvient de la sorte à déterminer sans ambiguïté la position de ce point dans le plan des axes.

C'est donc en assignant à la droite absolue de nouvelles manières d'être exprimées par les nombres positifs ou négatifs que Descartes prélude à l'une de ses plus belles découvertes.

Pour compléter l'œuvre du maître, il suffit de regarder les axes comme des droites réelles, puis de remplacer les points géométriques de leur plan par des points réels ou imaginaires, et de prendre pour coordonnées de ceux-ci des segments droits de mode convenable.

C'est ainsi qu'en portant sur les axes xx', yy', à partir de l'origine O (*fig.* 20), les longueurs $\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = a$, $\mathrm{OQ} = \mathrm{OQ}' = b$; puis, en menant par les points P, P′, Q, Q′, des parallèles à ces axes, on détermine, indépendamment des points réels M, M′, M″, M‴, les points imaginaires suivants dont les coordonnées sont en regard :

(M , M′),	$x = +a$,	$y = +bi$,
(M′, M),	$x = +a$,	$y = -bi$.
(M′, M″),	$x = +ai$,	$y = -b$,
(M″, M′),	$x = -ai$,	$y = -b$;
(M″, M‴),	$x = -a$,	$y = -bi$,
(M‴, M″),	$x = -a$,	$y = +bi$,
(M‴, M),	$x = -ai$,	$y = +b$,
(M , M‴),	$x = +ai$,	$y = +b$,
(M , M″),	$x = +ai$,	$y = +bi$,
(M″, M),	$x = -ai$,	$y = -bi$,
(M′, M‴),	$x = -ai$,	$y = -bi$,
(M‴, M′),	$x = -ai$,	$y = +bi$;

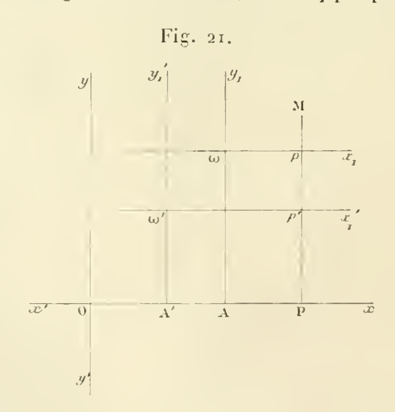
De même, si l'on prend sur Ox (*fig.* 20) les longueurs $OR = a$, $RS = RS' = b$; sur Oy, les longueurs $OT = c$, $TV = TV' = d$; puis, que par les points S, S', V, V', on mène aux axes des parallèles qui se coupent en N, N', N″, N‴, on trouve, outre les points réels N, N', N″, N‴, les points imaginaires :

(N, N″),	$x = a + bi,$	$y = c + di,$
(N″, N),	$x = a - bi,$	$y = c - di,$
(N', N‴),	$x = a + bi,$	$y = c - di.$
(N‴, N'),	$x = a - bi,$	$y = c + di,$
(N, N‴),	$x = a + bi,$	$y = c + d,$
(N‴, N),	$x = a - bi,$	$y = c + d.$
(N, N'),	$x = a + b,$	$y = c + di,$
(N', N),	$x = a + b,$	$y = c - di.$
(N″, N‴).	$x = a - b,$	$y = c - di,$
(N‴, N″),	$x = a - b,$	$y = c + di;$

et l'on obtiendrait aussi facilement les coordonnées de tout autre point du plan des axes.

Quant aux changements d'axes, ils s'appliquent aux coor-

Fig. 21.



données imaginaires ou mixtes comme aux coordonnées réelles.

Il est bon d'ajouter toutefois que les axes peuvent être simples ou disjoints sans amener, dans les formules de transformation, d'autres changements que la substitution de certaines valeurs imaginaires ou mixtes à des valeurs réelles.

S'agit-il, par exemple, des axes xx', yy' (*fig.* 21), qui se disjoignent en restant parallèles à eux-mêmes et deviennent, l'un $x_1x'_1$, l'autre $y_1y'_1$? Tandis que leur origine O se transforme en un point imaginaire (ω, ω') ayant pour abscisse $O(A, A') = \alpha + \beta i$ et pour ordonnée $(A, A')(\omega, \omega') = \gamma + \delta i$, les coordonnées $x = OP$, $y = PM$, d'un point quelconque M de leur plan se remplacent par d'autres $x_1 = (\omega, \omega')(p, p')$, $y = (p, p')M$, généralement plus compliquées. Mais, entre ces nouvelles coordonnées et les anciennes, on a toujours les relations de la forme

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1,$$

à condition d'y remplacer les constantes a et b par leurs valeurs respectives

$$\alpha + \beta i, \qquad \gamma + \delta i.$$

Propriétés segmentaires et métriques de la droite. — Ce qui distingue essentiellement la ligne droite de toutes les autres lignes, c'est que les segments qu'elle intercepte sur les axes, à partir de l'origine, ou sur des parallèles à ces axes à partir du point où elles se rencontrent, ne cessent jamais d'être proportionnels.

Ainsi, la droite réelle qui coupe les axes et leurs parallèles menées par le point O' en A, B, A', B' (*fig.* 22), donne la proportion

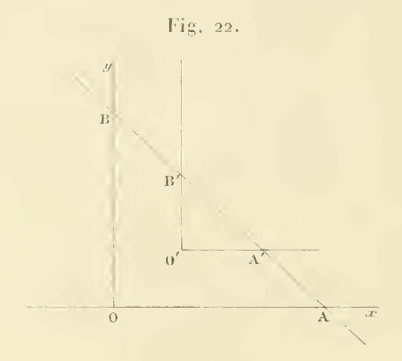
$$\frac{OA}{OB} = \frac{O'A'}{O'B'},$$

et l'on verrait aisément qu'il en est de même de la droite radiée.

Mais, pour exprimer plus simplement les propriétés segmentaires et métriques de la droite, il suffit de faire passer l'axe des abscisses par un de ses points réels, pris pour origine, et de ne considérer que des parallèles à l'axe des ordonnées.

Dans ces conditions, la droite devient le lieu des points dont l'ordonnée est à l'abscisse dans un rapport constant. De

Fig. 22.



plus, elle se traduit algébriquement par une équation du premier degré à deux variables, qui forme l'expression générale de ses propriétés métriques.

Pour le faire voir, considérons d'abord la droite réelle OM passant par l'origine O du système xx', yy' supposé rectangulaire (*fig.* 23).

Si l'on prend sur cette droite le point réel A, puis les points imaginaires (B, B'), (C, C'), dont l'un a ses composantes symétriques par rapport à l'origine O, et dont l'autre est quelconque, les coordonnées du premier point sont $x = \mathrm{O}a$, $y = \mathrm{A}a$; celles du second $x = \mathrm{O}bi$, $y = \mathrm{B}bi$; celles du troisième $x = \mathrm{O}(c, c')$, $y = (c, c')(\mathrm{C}, \mathrm{C'})$, et ces dernières peuvent s'évaluer en projetant le milieu D de CC', d'abord en d sur Ox, puis en E sur Cc, ce qui donne $\mathrm{O}(cc') = \mathrm{O}d + dci$, $(c, c')(\mathrm{C}, \mathrm{C'}) = c\mathrm{E} + \mathrm{EC}i$.

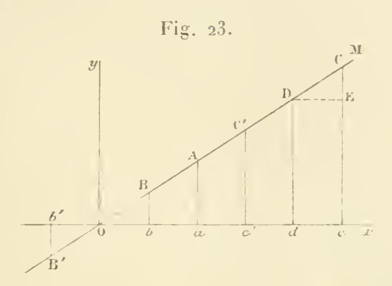
Or, tous les triangles de la figure étant semblables, on en

conclut immédiatement

$$\frac{Aa}{Oa} = \frac{Bbi}{Obi} = \frac{cE + ECi}{Od + dci}.$$

De plus, en désignant par m la valeur commune de ces rapports égaux, qui est réelle, et par x, y les coordonnées

Fig. 23.



d'un point quelconque de la droite OM, on trouve pour l'équation de cette droite

$$\frac{y}{x} = m, \qquad \text{ou} \qquad y = mx.$$

Enfin, si l'on prend sur yy', à partir de l'origine O, une ordonnée p, réelle, imaginaire ou mixte, et que, par l'extrémité de cette ordonnée, on mène une parallèle à OM, on voit que cette parallèle est, selon les cas, simple ou disjointe, mais que le rapport de l'ordonnée diminuée de p d'un quelconque de ses points à l'abscisse correspondante restant égal à m, son équation n'est autre que

$$y - p = mx.$$

La droite rectangle s'exprime par une équation du premier degré dans laquelle le coefficient angulaire m se remplace par i.

Soit, en effet, O (A, A') (*fig.* 24) la tige d'une droite rectangle dont l'origine réelle coïncide avec celle du système de coordonnées et dont l'axe se confonde avec Ox.

Les extrémités du cycle $OAA'A''A'''$ du premier système de cette droite ayant pour données respectives

(A, A'),	$x = OP$,	$y = PAi$,
(A', A''),	$x = OPi$,	$y = PAi^2 = PA'$,
(A'', A'''),	$x = OPi^2 = OP'$,	$y = PAi^3 = PA'i$,
(A''', A),	$x = OPi^3 = OP'i$,	$y = PAi^4 = PA$,

on en conclut d'abord

$$\frac{PAi}{OP} = \frac{PA'}{OPi} = \frac{PA'i}{OP'} = \frac{PA}{OP'i} = i.$$

Construisant ensuite le segment mixte $O(A, A')(B, B')$, et

Fig. 24.

projetant (B, B') d'abord en (Q, Q') sur Ox, puis en (β, β') sur AA', on trouve pour coordonnées de ce point

$$x = O(Q, Q') = OP + PQi,$$
$$y = (B, B')(Q, Q') = PAi + A\beta.$$

Mais, à cause des égalités $PA = OP$, $A\beta = -PQ$, on a

bien évidemment

$$\frac{\mathrm{PA}i + \mathrm{AB}}{\mathrm{OP} + \mathrm{PQ}i} = i.$$

Donc, si l'on désigne par x, y les coordonnées d'un point quelconque de la droite rectangle, on a pour équation de cette droite

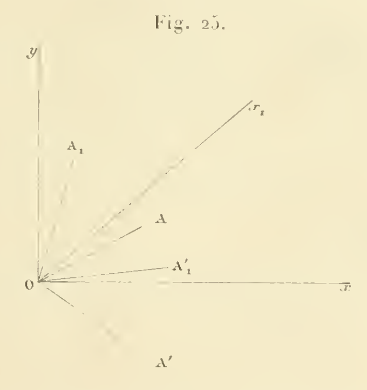
$$\frac{y}{x} = i \qquad \text{ou} \qquad y = ix.$$

L'équation de la droite O(A', A) inverse de la précédente est, d'ailleurs, $y = -ix$. Quant à celles de leurs parallèles, elles sont de la forme $y - p = \pm ix$, l'*ordonnée à l'origine* p pouvant être, suivant les cas, réelle, imaginaire ou mixte.

En appliquant les mêmes raisonnements à la droite radiée, on trouve diverses équations de cette droite, suivant la position de sa tige par rapport à l'axe des abscisses.

Lorsque cette tige est O(A, A') et que son axe coïncide

Fig. 25.



avec Ox (*fig.* 25), l'équation de la radiée est $y = mix$, m étant moindre que l'unité.

Si la tige O(A, A') tournant autour de l'origine O prend la position O(A_1, A_1'), son axe Ox_1 formant alors avec Ox

l'angle α, l'équation de la radiée devient

$$y = \frac{\sin\alpha + mi\cos\alpha}{\cos\alpha - mi\sin\alpha}\,x.$$

Enfin, quand l'axe de la radiée se confond avec Oy, cette équation se réduit à

$$y = \frac{i}{m}\,x \qquad \text{ou} \qquad y = m'ix,$$

m' étant alors plus grand que l'unité.

Les équations de la radiée inverse $O(A', A)$ ne diffèrent des précédentes que par le changement de m en $-m$. Celles des parallèles aux deux droites renferment, de plus, l'ordonnée à l'origine p de mode quelconque.

En résumé, la droite, qu'elle soit réelle ou radiée, se représente, en coordonnées rectangulaires, par l'équation générale

$$Ay + Bx + C = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C sont réels, imaginaires ou mixtes.

Réciproquement, cette équation représente toujours une droite en coordonnées rectangulaires.

Pour le faire voir, il suffit d'en tirer la formule

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$$

et de la construire.

On peut aussi raisonner de la manière suivante :

Si l'on pose successivement $A = 0$, $B = 0$, dans l'équation proposée, on en tire

$$x = -\frac{C}{B}, \qquad y = -\frac{C}{A},$$

et, par suite,

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A}.$$

Or, quand les axes se déplacent parallèlement à eux-mêmes, les coefficients A et B ne sauraient varier.

Donc, le lieu de l'équation proposée est tel que les segments qu'il intercepte sur les axes à partir de l'origine, ou sur les parallèles à ces axes à partir du point où elles se coupent, sont constamment proportionnels. En d'autres termes, ce lieu géométrique est une droite.

Pour construire le lieu complet de toute équation du premier degré à deux variables, on assigne à l'abscisse des valeurs réelles, imaginaires ou mixtes.

Mais, si les valeurs monômes de x conduisent en pareil cas à des branches nettement définies, les valeurs mixtes de cette variable ne fournissent, à cause de leur double indétermination, que des points entièrement indépendants les uns des autres.

Pour remédier à cet inconvénient, il suffit d'observer que, lorsqu'on cherche l'équation d'une droite quelconque, les valeurs mixtes de l'abscisse varient, pour une même branche, de telle sorte que leurs parties de modes contraires restent proportionnelles. D'où il suit que, dans le problème inverse, il faut soumettre la variable indépendante à la même loi.

Toute autre relation établie entre les deux termes de cette variable, lorsqu'elle est mixte, entraîne d'ailleurs une nouvelle classification des points du lieu.

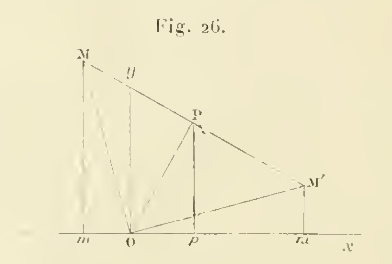
S'agit-il, pour le faire voir, de l'équation $y = ix$, par exemple ?

Si l'on se donne pour abscisse le segment mixte $Op + pmi$ (*fig.* 26) et qu'on détermine le segment rectangle O(M, M') dont il est la projection, on voit que (M, M') est un point du lieu et qu'il suffirait pour obtenir la branche O(M, M') de faire varier Op et pmi dans le même rapport. Mais, afin d'établir une relation nouvelle entre ces derniers segments, on peut observer que p est la projection du milieu P de MM', tirer OP, représenter l'angle POp par α, OP par ρ, PMi

par ρi; puis, en conclure $Op = \rho \cos\alpha$, $pmi = \rho i \sin\alpha$, et finalement $x = \rho\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$.

Or, il suffit de faire varier α, en laissant ρ constant, dans cette dernière formule, pour obtenir une infinité de points imaginaires répartis sur des circonférences concentriques à l'origine O, et ce sont évidemment encore les points du lieu proposé. Mais ils se trouvent autrement classés que si l'on sup-

Fig. 26.



pose, au contraire, α constant et ρ variable, car on retrouve alors les unes après les autres les branches rectilignes de ce même lieu.

L'utilité d'une classification aussi simple que possible des points de la droite s'est d'ailleurs fait sentir dès qu'on a voulu résoudre les problèmes relatifs à cette ligne.

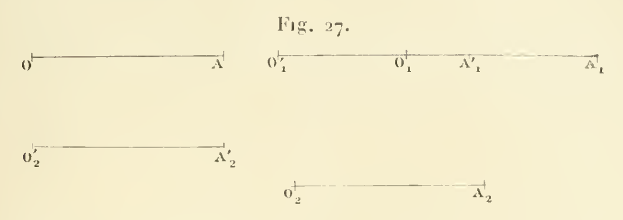
Opérations graphiques sur les segments droits. Quantités géométriques. — On sait qu'à tout segment rectiligne correspondent une infinité de segments coplanaires qui lui sont équipollents. En d'autres termes, un segment droit qui reste dans le même plan ne change pas lorsque ses composantes, gardant leur sens respectif, se déplacent dans leur direction ou deviennent parallèles.

C'est ainsi que le segment réel OA (*fig.* 27) peut se transformer en (O_1, O'_1) (A_1, A'_1) puis, en (O_2, O'_2) (A_2, A'_2).

De même, le segment imaginaire O(B, B') (*fig.* 28) devient tour à tour (O_1, O'_1) (B_1, B'_1), (O_2, O'_2) (B_2, B'_2) et même

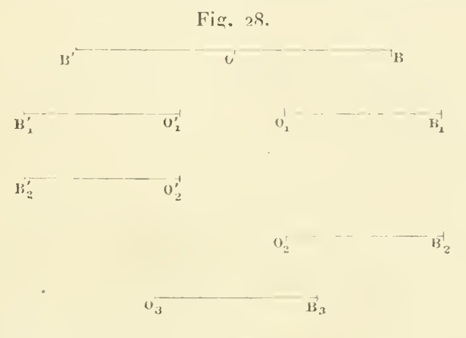
(O_3, B_3) (B_3, O_3), ses composantes étant alors superposées, quoique de sens contraires.

Fig. 27.



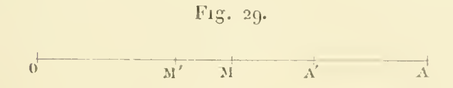
Le milieu d'un segment droit a constamment pour composantes les milieux de ses composantes de même ordre.

Fig. 28.



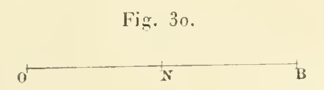
Le milieu du segment $O(A, A')$, par exemple (*fig.* 29), a

Fig. 29.



pour première composante le milieu M de OA et pour seconde composante le milieu M' de OA'.

Fig. 30.



De même, le segment (O, B) (B, O) (*fig.* 30), bien qu'imaginaire, a pour milieu le point réel N.

Étant donnés deux segments droits de même origine et de même direction, tels que $O(A, A')$, $O(B, B')$ (*fig.* 31), on voit d'abord que leur somme a pour première composante $OA + OB$, pour seconde composante $OA' + OB'$, et que leur différence est $(B, B')(A, A')$. Si l'on prend ensuite le

Fig. 31.

O B' M' A' B M A

milieu (M, M') de cette différence, on reconnaît aisément que $O(M, M')$ est la demi-somme des segments proposés.

Il vient d'ailleurs

$$O(A, A') = O(M, M') + (M, M')(B, B'),$$
$$O(B, B') = O(M, M') - (M, M')(B, B'),$$

et l'on en déduit par le calcul

$$O(A, A')\,O(B, B') = \overline{O(M, M')}^2 - \overline{(M, M')(B, B')}^2.$$

Le produit de deux segments droits quelconques est donc égal au carré de leur demi-somme diminuée du carré de leur demi-différence.

C'est grâce à la simplicité de cette démonstration que l'Algèbre prend ici l'avance sur la multiplication graphique.

La règle donnée par Descartes pour construire le produit de deux droites repose sur ce fait que :

Deux droites parallèles ou antiparallèles coupent deux droites concourantes en parties directement ou inversement proportionnelles.

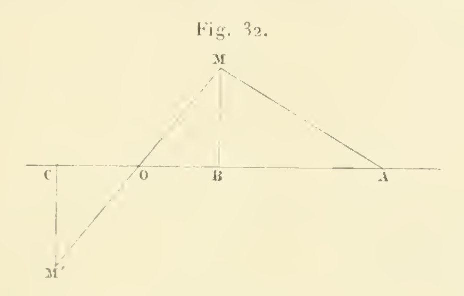
Lorsqu'on assigne un sens aux parties considérées, on trouve que deux antiparallèles peuvent déterminer : 1° deux *moyens égaux* entre deux droites de même sens; 2° deux *moyens symétriques* entre deux droites de sens contraires.

C'est ainsi que les antiparallèles AM, BM (*fig.* 32) donnent, entre les droites de même sens OA, OB, deux moyens

égaux à OM; tandis que les antiparallèles AM, CM′ déterminent, entre les droites de sens contraires OA, OC, les moyens symétriques OM, OM′.

Si l'on multiplie par i l'un des moyens égaux OM, et l'autre par $-i$, on en conclut l'existence de deux moyens symétriques imaginaires O(M, M′), O(M′, M), entre les droites de

Fig. 32.



même sens OA, OB. En opérant de même sur les moyens symétriques OM, OM′, on trouve deux moyens égaux, soit à O(M, M′), soit à O(M′, M) entre les droites de sens contraires OA, OC.

Pour plus de brièveté, chacun des moyens égaux ou symétriques que l'on peut construire entre deux droites s'appelle *moyenne proportionnelle* ou *moyenne symétrique* entre ces droites.

Toutes les considérations précédentes s'étendent aux segments droits isoscèles ou scalènes.

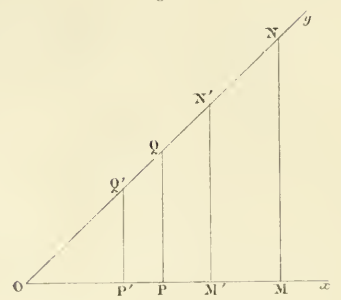
C'est ainsi que deux disjointes parallèles (M, M′) (N, N′), (P, P′) (Q, Q′) (*fig.* 33), déterminent sur deux droites réelles concourantes Ox, Oy, les segments scalènes O(M, M′), O(N, N′), O(P, P′), O(Q, Q′), tels que

$$\frac{O(M, M')}{O(N, N')} = \frac{O(P, P')}{O(Q, Q')}.$$

On pourrait en conclure déjà le produit d'un segment scalène d'abord par un segment isoscèle, d'ailleurs réel ou ima-

ginaire; puis, par un segment scalène. Mais les propriétés

Fig. 33.

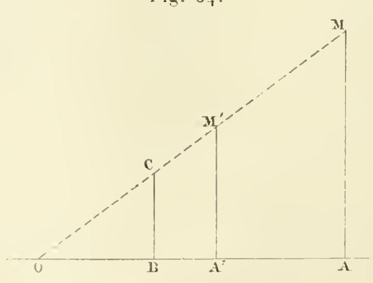


segmentaires de la droite permettent de résoudre plus simplement la question.

S'agit-il, en effet, de multiplier le segment scalène O(A, A') par le segment réel BC ?

Sur O(A, A') on prend d'abord, à partir de l'origine OB = 1; puis on élève les perpendiculaires BC, (A, A')

Fig. 34.



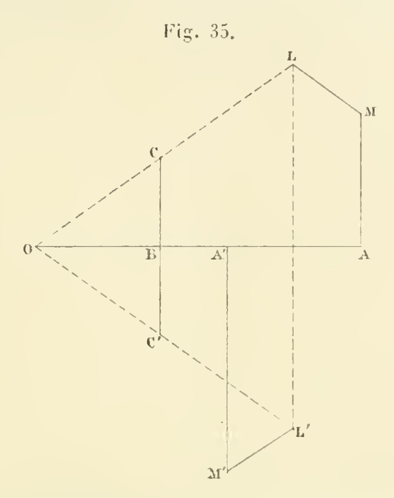
(*fig.* 34), et la droite OC, qui coupe cette dernière en (M, M'), donne

$$O(A, A').BC = (A, A')(M, M').$$

De même, pour multiplier O(A, A') par B(C, C'), on prend OB = 1 (*fig.* 35) sur la première de ces droites; puis on

élève à celle-ci les perpendiculaires B(C, C'), (A, A'); on tire O(C, C'), qui rencontre l'axe de la disjointe (A, A') en (L, L'); on mène ensuite aux composantes OC', OC les parallèles LM, L'M', jusqu'à leur rencontre avec les composantes respectives de la disjointe (A, A'), et l'on en conclut

Fig. 35.



$$O(A, A').B(C, C') = (A, A')(M, M').$$

Faut-il encore trouver le produit de deux segments scalènes, tels que O(A, A'), B(C, C')?

Sur O(A, A') (*fig.* 36) on prend toujours OB = 1; puis on élève les perpendiculaires B(C, C'), (A, A'); on tire O(C, C'), qui rencontre l'axe de celle-ci en (L, L'); on mène aux composantes OC', OC les parallèles LM, L'M', jusqu'à leurs intersections M et M' avec les composantes respectives de la disjointe (A, A'), et le produit demandé n'est autre que

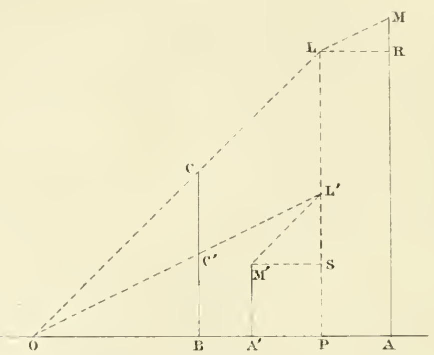
$$O(A, A').B(C, C') = (A, A')(M, M').$$

Ajoutons enfin que, pour B(C, C') = O(A, A'), il vient

$$\overline{O(A, A')}^2 = (A, A')(M, M').$$

Malgré leur simplicité relative, les opérations précédentes conduiraient difficilement à l'extraction des racines. Au contraire, les opérations concernant les segments rectangles permettent d'atteindre aisément ce but. Mais, comme la tran-

Fig. 36.

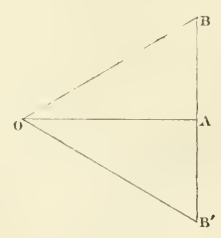


sition des segments rectangles aux segments droits est des plus simples, on peut dire que les opérations qui vont suivre sont communes à ces deux sortes de segments.

Il est d'ailleurs avantageux de représenter un segment rectangle par sa première composante. C'est ainsi que

$$OB = OA + AB\,i, \qquad OB' = OA + AB'\,i,$$

Fig. 37.



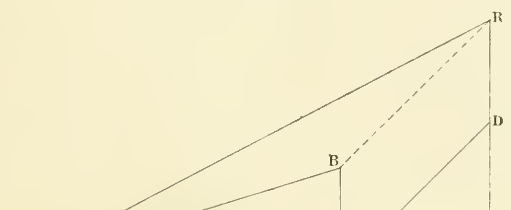
par exemple (*fig.* 37), désigneront pour nous deux segments rectangles ayant même partie réelle OA, mais des parties imaginaires ABi, AB'i, de sens contraires entre elles.

Les droites OB, OB′ prennent alors le nom de *quantités géométriques*. Chacune d'elles se définit par son *module* et son *argument*, c'est-à-dire par sa longueur OB ou OB′ et l'angle positif AOB′ ou négatif AOB′, qu'elle fait avec la direction fixe OA. De plus, toute quantité géométrique est réelle ou imaginaire, selon qu'elle coïncide avec OA ou avec une perpendiculaire à cette direction.

Cela dit, s'agit-il d'additionner les quantités géométriques $OB = OA + AB\,i$, $AD = AC + CD\,i$ (*fig.* 38)?

On dispose ces quantités de telle sorte que OC soit la somme de leurs parties réelles, puis on mène à AD la parallèle BR jusqu'à sa rencontre en R avec la direction CD; et, comme $CR\,i$ est la somme des parties imaginaires $AB\,i$, $CD\,i$, la somme cherchée n'est autre que $OR = OC + CR\,i$.

Fig. 38.



Comme BR est par construction équipollente à AD, on voit que l'addition des quantités géométriques OB, AD consiste à les composer cinématiquement.

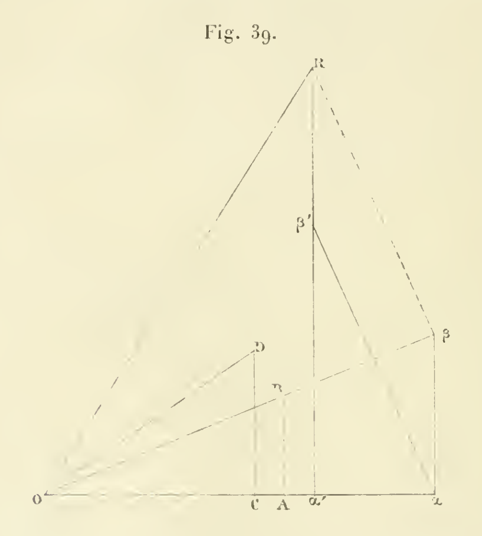
Veut-on maintenant multiplier, l'une par l'autre, les quantités géométriques $OB = OA + AB\,i$, $OD = OC + CD\,i$ (*fig.* 39)?

Le produit de OB par OC est la quantité géométrique $O\beta = O\alpha + \alpha\beta\,i$; et la similitude des triangles OAB, $O\alpha\beta$, qui ont un angle droit compris entre côtés proportionnels, donne $O\beta = OB.OC$.

Si l'on multiplie de même OB par CDi, on trouve pour produit $\alpha\beta' = \alpha\alpha' + \alpha'\beta' i$, et la similitude des triangles OAB, $\alpha\alpha'\beta'$ donne $\alpha\beta' = \text{OB}.\text{CD}$.

Les produits partiels Oβ, $\alpha\beta'$, étant placés de telle sorte que Oα' se trouve être la somme de leurs parties réelles, si l'on mène à $\alpha\beta'$ la parallèle βR jusqu'à sa rencontre en R

Fig. 39.



avec la direction $\alpha'\beta'$, la somme de leurs parties imaginaires est $\alpha'\text{R}i$, et le produit cherché $\text{OR} = \text{O}\alpha' + \alpha'\text{R}i$.

Mais, il y a plus, le produit OR peut se déduire directement de ses facteurs OB, OD.

En effet, les triangles OCD, OβR sont semblables comme ayant un angle droit compris entre côtés proportionnels, puisque $\text{O}\beta = \text{OC}.\text{OB}$ et que $\beta\text{R} = \alpha\beta' = \text{CD}.\text{OB}$. Il en résulte, d'une part, $\beta\text{OR} = \text{COD}$; d'où $\alpha\text{OR} = \text{AOB} + \text{COD}$; d'autre part, $\text{OR} = \text{OD}.\text{OB}$; et, par suite :

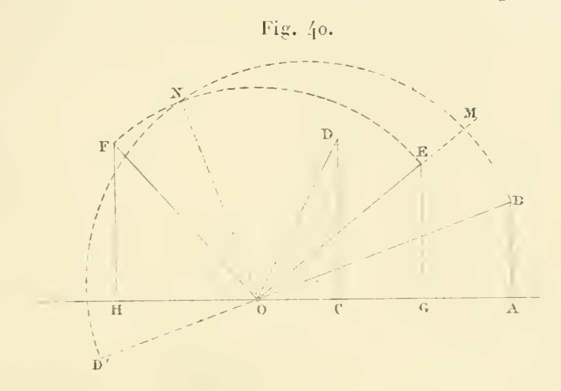
Le produit de deux quantités géométriques a pour argument et pour module la somme des arguments et le produit des modules de ses facteurs.

Les autres opérations relatives aux quantités géométriques se déduisant des précédentes, je n'en donnerai pour exemple que la recherche d'une moyenne proportionnelle et d'une moyenne symétrique entre deux quantités géométriques.

Soient $OB = OA + ABi$, $OD = OC + CDi$ (*fig.* 40) les quantités données.

La moyenne proportionnelle cherchée est la quantité géo-

Fig. 40.



métrique ayant pour argument la demi-somme AOM des angles AOB, COD, et pour module

$$\sqrt{OB.OD} = \sqrt{OB.OD'} = ON.$$

Elle n'est donc autre que le rabattement de ON sur OM, c'est-à-dire $OE = OG + GEi$.

La moyenne symétrique entre les segments donnés s'obtient de même en multipliant OE par i : ce qui donne la quantité géométrique $OF = OH + HFi$ perpendiculaire à cette dernière moyenne.

Coniques rectilignes.

Le système de deux droites quelconques situées dans un même plan s'appelle, pour plus de brièveté, *conique recti-*

ligne. Le point d'intersection de ces droites est le *centre* de la conique.

Une conique rectiligne peut être formée de deux droites réelles simples ou disjointes, d'une droite réelle et d'une radiée ou de deux radiées.

Parmi les coniques de cette dernière catégorie, le système de deux droites rectangles inverses l'une de l'autre mérite surtout de fixer l'attention. Je lui donne le nom de *conique rectangle imaginaire* ou simplement de conique rectangle.

Le centre d'une pareille conique est tantôt réel, tantôt imaginaire.

Ainsi, les droites rectangles $O(M, M')$, $O(M', M)$ (*fig.* 41)

Fig 41.

ayant pour origine commune le point réel O, forment une conique rectangle dont le centre est cette origine.

De même, la conique rectangle résultant de la combinaison des droites inverses O et O', qui se coupent en un point imaginaire (ω, ω') a pour centre ce point (*fig.* 42).

Les intersections d'une conique rectangle et d'une droite réelle ne sont autres que celles de ses composantes avec cette droite. D'où il suit que, pour obtenir les intersections de la conique rectangle O et de la droite réelle AB, par exemple (*fig.* 41), il suffit de mener OP perpendiculaire à AB, puis de rabattre la première droite sur la seconde suivant PM et

Fig. 42.

PM'. Les points (M, M') et (M', M) sont les intersections cherchées.

On trouve de la même façon les intersections de la conique rectangle (ω, ω') (*fig.* 42) et de la droite réelle AB. Ce sont les points (M, M') et (N, N').

La conique rectangle ne laisse pas d'offrir une grande analogie avec la circonférence. Elle a, comme celle-ci, des

cordes et des diamètres se coupant à angle droit et porte souvent le nom de *circonférence infiniment petite*.

La corde interceptée par une conique rectangle sur une droite réelle est la différence des segments compris sur cette droite entre l'un quelconque de ses points et ses intersections avec la conique.

Ainsi, la corde interceptée par la conique O sur la droite réelle AB (*fig.* 41) est le segment imaginaire ayant pour composantes M'M et MM'.

De même, la corde interceptée sur la droite réelle AB par la conique (ω, ω') (*fig.* 42) est le segment scalène formé par les composantes NM et N'M'.

D'après ce qu'on a dit précédemment, le milieu d'une corde a toujours pour composantes les milieux des siennes.

Le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles étant, par définition, un *diamètre conjugué* de celles-ci, la perpendiculaire menée du centre d'une conique rectangle à l'une quelconque de ses cordes est un diamètre conjugué de cette corde et de ses parallèles.

Car la perpendiculaire OP, abaissée du centre de la conique O sur la droite AB (*fig.* 41), coupe cette dernière en un point réel P dont les composantes sont évidemment les milieux de celles de la corde interceptée (M', M) (M, M') et l'on voit aisément que OP passe aussi par les milieux des cordes parallèles à cette dernière.

De même, la perpendiculaire abaissée du centre de la conique (ω, ω') sur la droite AB (*fig.* 42) coupe la corde (N, N') (M, M') en son milieu (L, L'); ou, en d'autres termes, les composantes NM, N'M' de cette dernière ont pour milieux respectifs L et L'.

En effet, le centre (ω, ω') de la conique est déterminé par le point auxiliaire (l, l'). Mais les triangles lNM, l'N'M' sont isoscèles. Donc, les points L et L' sont les milieux de leurs bases NM, N'M'. On verrait de même que la disjointe

(ω, ω') (l, l') passe aussi par les milieux des cordes parallèles à (N, N') (M, M').

Ces propriétés descriptives de la conique rectangle font assez pressentir celles des autres coniques rectilignes. Toutes admettent une infinité de systèmes de diamètres conjugués et les intersections mutuelles de ces coniques se ramènent à celles des droites qui les composent.

Étant données sur un plan deux droites quelconques, on peut les rapporter à un même système d'axes, exprimer chacune d'elles par l'équation qui la caractérise, puis en conclure l'équation de la conique rectiligne qu'elles concourent à former.

Si les deux droites en question sont concourantes et qu'on prenne leur point d'intersection pour origine, leurs équations respectives étant

$$y = ax, \qquad y = bx,$$

celle de leur système est

$$(y - ax)(y - bx) = 0,$$

ou

$$y^2 - (a + b)xy + abx^2 = 0.$$

Réciproquement, l'équation homogène

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0$$

dont les coefficients sont réels, imaginaires ou mixtes, représente toujours une conique rectiligne ayant pour centre l'origine des coordonnées.

En effet, mise sous la forme

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^2 + B\left(\frac{y}{x}\right) + C = 0,$$

cette équation, comme on le verra plus loin, ne cesse jamais d'avoir deux racines a et b de modes quelconques. Mais elle

peut alors s'écrire

$$A\left(\frac{y}{x} - a\right)\left(\frac{y}{x} - b\right) = 0,$$

et l'on en conclut qu'elle représente un système de deux droites radiées ou réelles.

Remarquons enfin, avant de clore cette étude, qu'avec les coniques rectilignes apparaissent de nouvelles propriétés segmentaires ou métriques des figures.

Soient, par exemple, (M, M'), (M', M) les intersections de la conique rectangle O et de la droite réelle AB (*fig.* 43).

Fig. 43.

On sait que, pour obtenir ces intersections, il suffit de mener à AB la perpendiculaire OP, puis de rabattre celle-ci sur celle-là suivant PM, PM'.

Les sécantes A(M, M'), A(M', M) ayant pour demi-somme AP et pour demi-différence PMi, leur produit

$$\begin{aligned} &A(M, M').\,A(M', M) \\ &= \overline{AP}^2 - \overline{PMi}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 \end{aligned}$$

reste constant lorsque la droite AB tourne dans le plan de la figure autour du point fixe A. Ce produit se nomme la *puissance* de A relativement à la conique rectangle.

Si l'on mène OB perpendiculaire à OA et qu'on joigne au point O le milieu C de AB, ce qui donne CO = CA, les

quatre points A, B, (M, M′) (M′M), satisfont aux relations

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \mathrm{C}(\mathrm{M}, \mathrm{M}').\mathrm{C}(\mathrm{M}', \mathrm{M}),$$
$$\overline{\mathrm{PM}i}^2 = -\overline{\mathrm{PM}}^2 = \mathrm{PA}.\mathrm{PB}.$$

C'est ce qu'on exprime en disant que les points (M, M′), (M′M) sont *conjugués harmoniques* des points A et B, ou *vice versa*.

S'il arrive que les droites OD, OE fassent des angles égaux avec OA, on a aussi

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \mathrm{CD}.\mathrm{CE}$$

et, par suite,

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \mathrm{C}(\mathrm{M}, \mathrm{M}').\mathrm{C}(\mathrm{M}', \mathrm{M}) = \mathrm{CD}.\mathrm{CE}.$$

Les points A, B, (M, M′), (M′, M), D, E sont alors *en involution*. Comme l'angle COC′, dont la bissectrice est OA, a son côté OC′ parallèle à AB, le point C a son *conjugué* à l'infini. De là son nom de *centre* de l'involution. Les points A et B sont en même temps les *points doubles* de celle-ci.

Si l'on désigne l'angle COC′ par θ et le rapport $\frac{\mathrm{C}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')}{\mathrm{C}(\mathrm{M}', \mathrm{M})}$ par ρ, on a

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = \mathrm{OC}(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$\mathrm{C}(\mathrm{M}', \mathrm{M}) = \mathrm{OC}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2.$$

Mais, si l'on désigne par e la base du système népérien, ce dernier membre, comme on le verra plus loin, revient à $e^{2\theta i}$ il vient donc finalement

$$\rho = e^{2\theta i}.$$

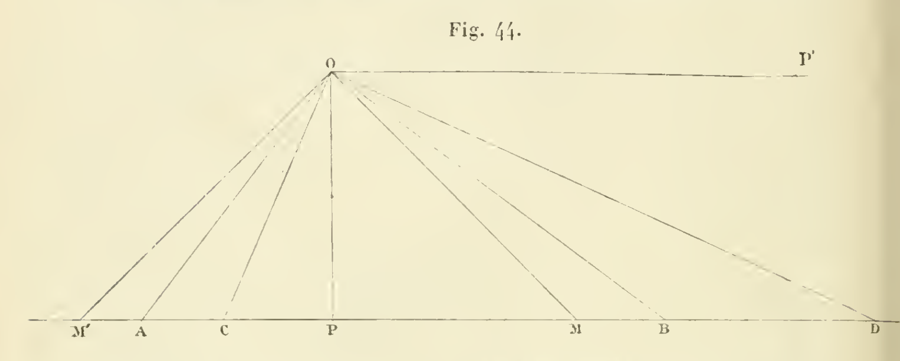
C'est la formule de Laguerre. Je crois en outre que la

conique rectangle remplace avec avantage les *droites isotropes* de ce dernier.

Enfin les points doubles d'une involution peuvent être imaginaires.

C'est ainsi qu'étant donnés (*fig.* 44) les points d'intersection (M, M'), (M', M) de la conique rectangle O avec la

Fig. 44.



droite AB, et le milieu P de (M', M) (M, M'), si l'on tire du point O les angles droits AOB, COD, POP', on a d'une part

$$\overline{PMi}^2 = -\overline{PM}^2 = PA.PB = PC.PD;$$

et comme d'autre part le conjugué du point P est à l'infini, on en conclut que les points (M, M'), (M', M), A, B, C, D forment une involution dont le centre est P et dont les points doubles sont (M, M'), (M', M).

CHAPITRE III.

COURBES PLANES.

Si, comme on a raison de le dire, le système de coordonnées rectilignes a pour but de ramener la forme au nombre par l'intermédiaire de la situation, il faut se garder de prendre cette définition dans un sens trop restreint.

On sait, en effet, que, dans certains cas, l'équation d'une courbe plane peut résulter indifféremment des propriétés descriptives de cette courbe ou de ses propriétés segmentaires; que cette équation dépend du choix des axes et qu'un tel choix influe même sur la nature de la courbe, lorsque celle-ci n'est définie que par ses propriétés segmentaires.

Mais ce qu'il importe aussi de reconnaître, c'est que, rapportées au même système d'axes, certaines courbes de formes différentes ne sont pas plus tôt de modes contraires entre elles qu'elles manifestent immédiatement des propriétés segmentaires identiques. D'où la possibilité de constituer avec ces courbes des lieux géométriques vraiment généraux, de traiter ces derniers comme les figures de l'Analyse ancienne et d'exprimer chacun d'eux, malgré la diversité de ses branches, par une seule et même équation.

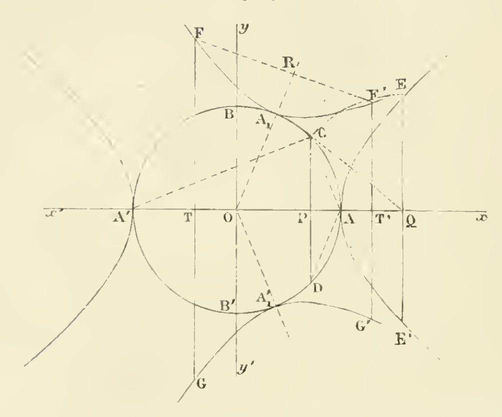
L'étude des coniques va nous en fournir la preuve.

Soit d'abord une circonférence de rayon $OA = r$ (*fig.* 45).

Si l'on prend pour axes de coordonnées les directions xx', yy' de deux de ses diamètres rectangulaires AA', BB'; puis,

qu'on mène en P la corde CD perpendiculaire à AA', les antiparallèles CA', DA donnent PC.PD = PA.PA'. Mais, P étant le milieu de CD, on a PC.PD = $-\overline{PC}^2$; de

Fig. 45.



plus, comme les segments PA, PA' ont pour demi-somme OP et pour demi-différence OA, il vient

$$PA.PA' = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2.$$

On a donc finalement

$$-\overline{PC}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2,$$

ou, en désignant PC par y et OP par x,

$$-y^2 = x^2 - r^2.$$

Cela posé, si, par le point C, on mène à la circonférence une tangente coupant xx' en Q, les antiparallèles CA, CA' donnent

$$\overline{QC}^2 = QA.QA' = \overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2.$$

Mais, en rabattant QC suivant QE et QE' sur la perpendiculaire élevée en Q à xx', on reconnaît que le lieu des points

E, E' est une hyperbole équilatère ayant OA pour demi-axe transverse ou rayon.

Or, rien n'empêche de supposer qu'après avoir engendré la circonférence réelle OA, le point A devienne imaginaire et que ses composantes décrivent, la première, l'arc AE, la seconde, l'arc AE', ou *vice versa*.

Dans cette hypothèse, les points (E, E') et (E', E) sont imaginaires conjugués. Leur abscisse commune est OQ. Quant à leurs ordonnées respectives, elles sont QEi, QE'i, c'est-à-dire les produits par i des ordonnées QE, QE'. Comme on a d'ailleurs $\mathrm{QE}i.\mathrm{QE}'i = -\overline{\mathrm{QE}i}^2 = \overline{\mathrm{QC}}^2$, on en conclut

$$-\overline{\mathrm{QE}i}^2 = \overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2,$$

ou, en désignant QEi par y et OQ par x,

$$-y^2 = x^2 - r^2.$$

Prenons enfin sur la circonférence OA deux points A_1, A'_1, équidistants de A. Supposons que ces points devenus imaginaires décrivent les hyperboles équilatères OA_1, OA'_1, de même mode qu'eux et prenons sur ces courbes les points (F, F'), (G, G'), symétriques par rapport à xx'.

Ces derniers points sont déterminés chacun par une équation telle que

$$-\overline{\mathrm{RF}i}^2 = \overline{\mathrm{OR}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2.$$

Lorsqu'on les rapporte aux axes xx', yy', ils ont pour abscisse commune O(T, T') et pour ordonnées respectives les segments égaux mais de modes contraires (T, T') (F, F'), (T, T') (G, G'). On a par suite

$$(\mathrm{T},\mathrm{T}')(\mathrm{F},\mathrm{F}').(\mathrm{T},\mathrm{T}')(\mathrm{G},\mathrm{G}') = -\overline{(\mathrm{T},\mathrm{T}')(\mathrm{F},\mathrm{F}')}^2.$$

D'autre part, les segments (T, T') A, (T, T') A', dont la demi-somme est O(T, T') et la demi-différence OA, ont pour

produit

$$(T,T')A.(T,T')A' = \overline{O(T,T')}^2 - \overline{OA}^2.$$

Or, si, désignant par α l'angle AOR, on projette la brisée $O(T,T')(F,F')$ sur les directions des segments OR, $R(F,F')$, ce qui donne

$$\begin{aligned} OR &= O(T,T')\cos\alpha + (T,T')(F,F')\sin\alpha, \\ RFi &= O(T,T')\sin\alpha - (T,T')(F,F')\cos\alpha, \end{aligned}$$

et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$-\overline{RFi}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{OA}^2,$$

on trouve

$$-\overline{(T,T')(F,F')}^2 = \overline{O(T,T')}^2 - \overline{OA}^2 \text{ (}^1\text{)},$$

ou, en désignant $(T,T')(F,F')$ par y et $O(T,T')$ par x,

$$-y^2 = x^2 - r^2.$$

Il suit de là que, si l'on appelle *circonférence réelle* l'ensemble de la branche circulaire et de ses *conjuguées* hyperboliques en nombre infini, on peut dire que, rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, cette courbe est le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne symétrique entre deux segments droits différant constamment entre eux de $AA' = 2r$, et qu'elle a pour équation

$$-y^2 = x^2 - r^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Lorsque le rayon OA devient nul, la circonférence réelle se réduit au système de ses deux asymptotes, c'est-à-dire à la conique rectangle ayant pour axe Ox et dont l'équation est,

---

(1) On eût pu conclure immédiatement cette relation de ce que les droites $A(F,F')$, $A'(G,G')$ sont antiparallèles, comme on le verra plus loin à propos de la mesure des angles.

comme on l'a vu,

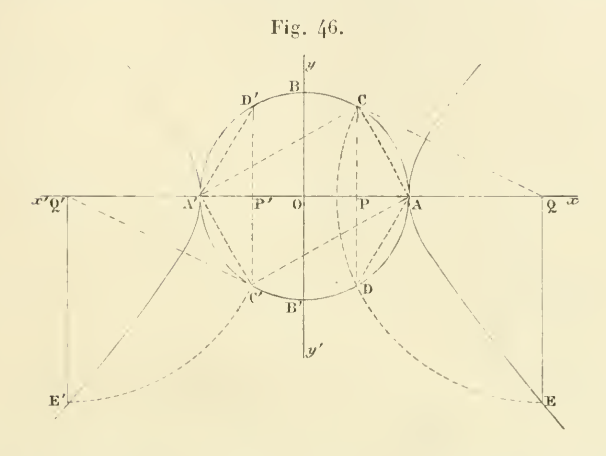
$$x^2 + y^2 = 0.$$

Si le rayon OA change de mode et devient (*fig.* 46)

$$O(A, A') = OA\,i = ri$$

rien n'empêche de le faire tourner encore autour du centre O.

Fig. 46.



Son extrémité (A, A') décrit alors une circonférence dont tous les points sont imaginaires comme ayant leurs composantes diamétralement opposées.

Prenons pour axes de coordonnées la direction de O(A, A') et celle du rayon O(B, B') qui lui est perpendiculaire. Puis, considérons sur cette nouvelle courbe deux points quelconques (C, C'), (D, D'), ayant leurs composantes de même ordre symétriques par rapport à xx'.

Ces points ont pour abscisse commune O(P, P') = OP i et pour ordonnées respectives

$$(P, P')(C, C') = PC\,i, \qquad (P, P')(D, D') = PD\,i.$$

Or, le diamètre (A, A')(A', A) = AA'i étant imaginaire,

il en est de même des segments

$$(P, P')(A, A') = PAi, \qquad (P, P')(A', A) = PA'i,$$

dont la demi-somme est OPi et la demi-différence OAi.

D'ailleurs, les antiparallèles menées des points (C, C') et (D, D') aux points (A', A) et (A, A') donnent

$$PCi.PDi = PAi.PA'i;$$

et, comme on a d'une part

$$PCi.PDi = -\overline{PCi}^2,$$

d'autre part

$$PAi.PA'i = \overline{OPi}^2 - \overline{OAi}^2,$$

on en conclut

$$-\overline{PCi}^2 = \overline{OPi}^2 - \overline{OAi}^2;$$

ou, en désignant PCi par y, OPi par x,

$$-y^2 = x^2 - r^2.$$

Cela posé, si par le point (C, C') on mène à la circonférence $O(A, A')$ une tangente coupant xx' en (Q, Q'), les segments compris entre ce point et les extrémités du diamètre $(A, A')(A', A)$ sont

$$(Q, Q')(A, A') = QAi, \qquad (Q, Q')(A', A) = QA'i;$$

leur demi-somme est OQi, leur demi-différence OAi, et les antiparallèles $(C, C')(A, A')$, $(C, C')(A', A)$ donnent

$$\overline{QCi}^2 = QAi.QA'i = \overline{OQi}^2 - \overline{OAi}^2.$$

Mais, si l'on multiplie QCi par i, et qu'on suppose le produit rabattu suivant $(Q, Q')(E, E')$ perpendiculaire à xx', on trouve que le lieu des points (E, E'), (E', E) est une hyperbole équilatère susceptible d'être décrite par l'un des points (A, A'), (A', A).

Comme on a, par hypothèse,

$$QCi = \frac{QE}{i},$$

il en résulte

$$\overline{QCi}^2 = -\overline{QE}^2$$

et, par suite,

$$-\overline{QE}^2 = \overline{OQi}^2 - \overline{OAi}^2,$$

ou, en remplaçant QE par y et OQi par x,

$$-y^2 = x^2 + r^2.$$

Cette hyperbole a donc mêmes propriétés segmentaires et métriques que la branche circulaire O(A, A').

Or, chaque point de cette dernière branche peut, ainsi qu'on le reconnaîtra sans peine, engendrer une hyperbole identique à la précédente et satisfaisant aux mêmes conditions.

Si donc on appelle *circonférence imaginaire* l'ensemble de la branche circulaire O(A, A') et de ses conjuguées hyperboliques en nombre infini, on a le droit de dire que, rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, cette nouvelle courbe est le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne, symétrique entre deux segments droits ayant pour différence constante (A, A')(A', A) $= 2ri$ et qu'elle s'exprime par l'équation

$$-y^2 = x^2 + r^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = -r^2.$$

Il peut arriver enfin que le segment mixte

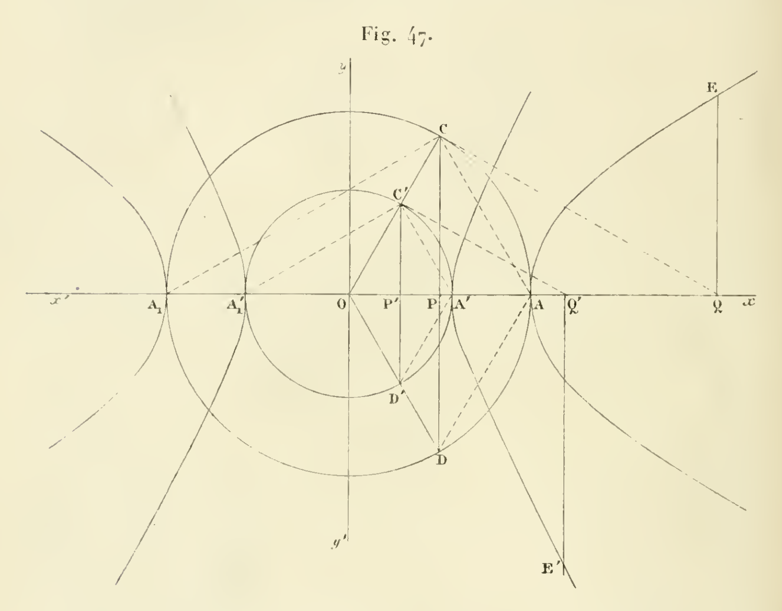
$$O(A, A') = r + si$$

(*fig.* 47), tourne autour du point O comme centre. La branche circulaire que son extrémité (A, A') décrit alors est formée de deux composantes concentriques, mais d'inégale longueur.

Menons par le point O des axes rectangulaires dont l'un xx' coïncide avec O (A, A'), et tirons deux rayons, O (C, C'), O (D, D'), symétriques par rapport à ce dernier axe.

Les points (C, C'), (D, D'), où ils coupent la branche O (A, A'), ont pour abscisse commune O (P, P') et pour or-

Fig. 47.



données respectives les segments égaux, mais de sens contraires (P, P') (C, C'), (P, P') (D, D').

D'un autre côté, le diamètre (A, A') (A_1, A'_1) étant mixte, il en est de même des segments (P, P') (A, A'), (P, P') (A_1, A'_1), dont la demi-somme est O (P, P') et la demi-différence O (A, A').

D'ailleurs les antiparallèles

$$(C, C')(A_1, A'_1), \qquad (D, D')(A, A')$$

donnent

$$(P, P')(C, C').(P, P')(D, D') = (P, P')(A, A')(P, P')(A_1, A'_1).$$

Donc

$$-\overline{(P, P')(C, C')}^2 = \overline{O(P, P')}^2 - \overline{O(A, A')}^2,$$

ou, en désignant $(P, P')(C, C')$ par y et $O(P, P')$ par x,

$$-y^2 = x^2 - (r + si)^2.$$

Si, par le point (C, C'), on mène à la branche circulaire $O(A, A')$ une tangente coupant xx' en (Q, Q'), les segments $(Q, Q')(A, A')$, $(Q, Q')(A_1, A'_1)$ ont pour demi-somme $O(Q, Q')$, pour demi-différence $O(A, A')$, et les antiparallèles $(C, C')(A, A')$, $(C, C')(A_1, A'_1)$, donnent

$$\overline{(Q, Q')(C, C')}^2 = \overline{O(Q, Q')}^2 - \overline{O(A, A')}^2.$$

Multipliant alors $(Q, Q')(C, C')$ par i et portant le produit $(Q, Q')(E, E')$ sur la perpendiculaire élevée en (Q, Q') à Ox, on trouve que le lieu des points (E, E') est une hyperbole dont les composantes cessent d'être équilatères.

Comme on a

$$\overline{(Q, Q')(C, C')}^2 = -\overline{(Q, Q')(E, E')}^2,$$

on en conclut

$$-\overline{(Q, Q')(E, E')}^2 = \overline{O(Q, Q')}^2 - \overline{O(A, A')}^2,$$

ou, en désignant $(Q, Q')(E, E')$ par y et $O(Q, Q')$ par x,

$$-y^2 = x^2 - (r + si)^2.$$

Cette hyperbole a donc mêmes propriétés segmentaires ou métriques que la branche circulaire $O(A, A')$ et l'on verrait aisément que chaque point de celle-ci peut à son tour être l'origine d'une hyperbole identique à la précédente et satisfaisant aux mêmes conditions.

D'où il suit que, si l'on appelle *circonférence mixte* l'ensemble de la branche circulaire $O(A, A')$ et de ses conjuguées en nombre infini, on peut dire que cette nouvelle cir-

conférence étant rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, est le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne symétrique entre deux segments droits différant entre eux de $(A, A')(A_1, A'_1) = r + si$, et qu'elle a pour équation

$$-y^2 = x^2 - (r + si)^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = (r + si)^2.$$

Le centre d'une circonférence de rayon quelconque R peut d'ailleurs être un point réel ou imaginaire, autre que l'origine; et, si l'on désigne par a et b les coordonnées rectangulaires de ce point, lesquelles sont, ainsi que R, susceptibles d'affecter l'un ou l'autre mode, l'équation de la courbe est toujours de la forme

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Il est bon d'ajouter que, si les composantes des diverses branches du lieu sont tantôt superposées et tantôt disjointes, suivant que le centre est réel ou imaginaire, leur configuration n'en reste pas moins la même. On reconnaît facilement aussi qu'aucun changement d'axe ne saurait la modifier.

Avant de montrer que toutes les propriétés de la circonférence absolue s'étendent à la circonférence de mode quelconque, il convient de généraliser quelques notions élémentaires.

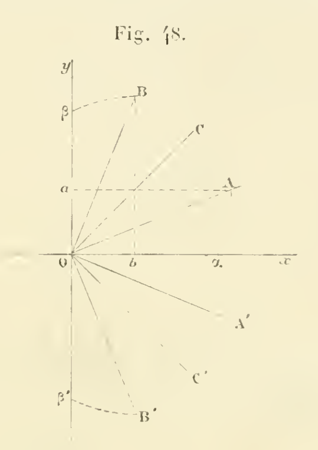
La distance de deux points géométriques ordinaires peut se définir le rayon de la circonférence ayant pour centre un de ces points et passant par l'autre. Cette définition s'applique également à la *distance de deux points de modes quelconques*.

D'après cela, tous les points de la circonférence de rayon r sont à la distance r de son centre. Si l'on prend celui-ci pour origines d'axes rectangulaires, sa distance au point quelconque (x, y) de la courbe s'exprime par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Or, telle est aussi la valeur du segment rectiligne compris entre

les deux points, tant qu'il est droit. Dans tout autre cas, le segment rectiligne allant de l'origine au point (x, y) est isoradié. De plus, il a constamment, comme on va le voir, le même mode que la distance de ses deux points extrêmes. D'où la possibilité de l'identifier avec cette distance et de prendre $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour sa mesure qui n'était pas encore effectuée.

Soient donc Ox, Oy (*fig.* 48) deux axes rectangulaires

Fig. 48.



appartenant, le premier, au segment réel $O(A, A')$, le second, au segment imaginaire $O(B, B')$, et considérons en outre le segment rectangle $O(C, C')$ qu'il est indifférent de rapporter à l'un ou l'autre axe.

Pour trouver la distance du point O au point (A, A'), c'est-à-dire le rayon de la circonférence ayant pour centre le premier de ces points et passant par le second, il faut mener Aa parallèle à Ox jusqu'à sa rencontre en a avec Oy; puis, du point a comme centre, avec Aa pour rayon, décrire un arc de cercle qui coupe Ox en α, et le rayon réel $O\alpha$ est la distance cherchée ou la valeur du segment $O(A, A')$.

De même, si l'on tire Bb parallèle à Oy jusqu'à sa ren-

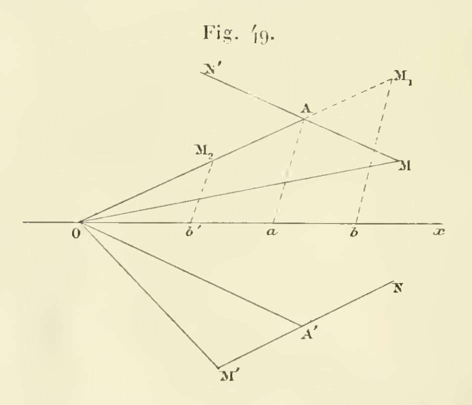
contre en b avec Ox, et qu'on décrive du point b comme centre avec Bb pour rayon un arc de cercle qui coupe Oy en β et β', on voit que la circonférence ayant le point O pour centre et passant par (B, B') ne saurait être qu'imaginaire et que son rayon $O(\beta, \beta') = O\beta i$ mesure la distance du point O au point (B, B') ou le segment $O(B, B')$.

Quant à la distance du point O au point (C, C'), elle est nulle. Ce qui s'accorde avec le nom de circonférence infiniment petite donné à la conique rectangle $O(C, C')$.

S'agit-il maintenant de trouver la distance du point O au point quelconque (M, M') (*fig.* 49)?

On commence par construire l'axe Ox du segment scalène

Fig. 49.



$O(M, M')$ et le segment isoradié $O(A, A')(M, M')$ qui lui correspond. Puis on détermine les distances $O(A, A')$ $(A, A')(M, M')$, dont l'une est réelle, l'autre imaginaire, et la somme algébrique de ces distances partielles est la distance cherchée ou la valeur du segment isoradié $O(A, A')(M, M')$.

Il est bon d'ajouter que la distance $O(A, A')$ étant $Oa = \alpha$, on peut en conclure la distance partielle (A, A') (M, M'), en prenant sur la direction OA les longueurs $AM_1 = AM_2 = AM$, puis, en menant à Aa les parallèles M_1b, M_2b', jusqu'à leurs rencontres en b et b' avec Ox. Car

on a bien de la sorte $a(b, b') = \beta i$ pour la distance partielle $(A, A')(M, M')$ et, par suite, $\alpha + \beta i$ pour la distance totale demandée.

La distance $O(N, N')$ du point O au point (N, N') symétrique de (M, M') par rapport à Ox serait de même $\alpha + \beta i$; tandis que les distances $O(M', M)$, $O(N', N)$ seraient l'une et l'autre égales à $\alpha - \beta i$.

On a supposé jusqu'ici que le point pris pour centre était réel. Mais il est facile de ramener le cas de deux points imaginaires au précédent, car rien n'empêche de mener par un point réel l'équipollent du segment rectiligne compris entre les points donnés.

La distance de deux points quelconques dont les coordonnées rectangulaires sont x', y', x'', y'' est, d'après ce qu'on vient de dire, constamment donnée par la formule

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$

et tel est aussi la carré de la valeur du segment rectiligne allant du point (x', y') au point (x'', y'').

Déduites, comme on l'a vu, de la seule considération des sécantes antiparallèles, les propriétés segmentaires et métriques de la circonférence entraînent celles du triangle rectangle de mode quelconque, pourvu qu'on regarde les côtés de celui-ci comme étant les distances mutuelles de ses sommets.

Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer la circonférence réelle OA, par exemple (*fig.* 50).

Si l'on joint au centre les points B, (C, C'), (D, D') de cette circonférence, on forme avec les coordonnées de ces points trois triangles rectangles ayant, le premier, tous ses côtés réels, le second, un côté réel Oc, un côté imaginaire cCi, un côté radié $O(C, C')$; enfin, le troisième, un côté radié $O(D, D')$ et deux côtés mixtes $O(d, d')$, $(d, d')(D, D')$.

Or, pour tous ces triangles, l'hypoténuse est OA, et l'on

a, d'après les propriétés de la circonférence,

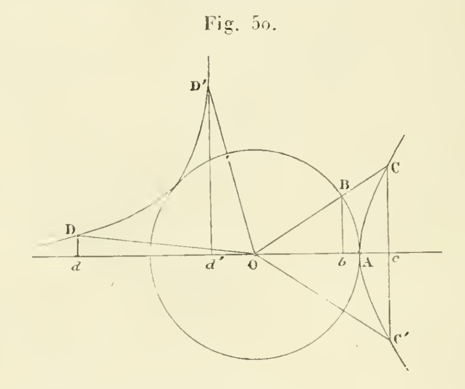
$$\overline{Ob}^2 + \overline{bB}^2 = \overline{OA}^2,$$

$$\overline{Oc}^2 + \overline{cC}^2 = \overline{OA}^2,$$

$$\overline{O(d,d')}^2 + \overline{(d,d')(D,D')}^2 = \overline{OA}^2.$$

Quant aux circonférences imaginaires ou mixtes, elles fournissent, comme on le verrait sans peine, d'autres tri-

Fig. 50.



angles rectangles jouissant des mêmes propriétés métriques.

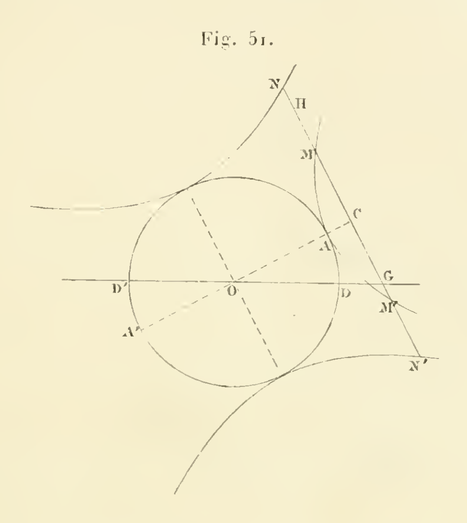
Une circonférence quelconque rencontre toujours une droite réelle en deux points.

Car, si l'on abaisse du centre de la circonférence une perpendiculaire sur la droite donnée, puis qu'on détermine la moyenne symétrique entre les distances du pied de cette perpendiculaire aux deux points où elle rencontre la circonférence, et qu'enfin, de ce même pied comme centre, on rabatte en sens contraires la moyenne ainsi obtenue sur la droite donnée, il est clair que les extrémités de cette moyenne dans ses nouvelles positions sont deux points communs aux lignes proposées.

Ainsi, pour nous en tenir aux exemples les plus simples,

les intersections de la circonférence réelle OA, ou de la circonférence imaginaire O(A, A') (*fig.* 51) avec la droite réelle GH, s'obtiennent en menant OC perpendiculaire à GH; puis, en construisant la moyenne symétrique entre les droites CA, CA', ou C(A, A'), C(A', A), et rabattant cette moyenne sur GH suivant C(M, M'), C(M', M), dans le premier cas,

Fig. 51.



C(N, N'), et C(N', N), dans le second, ce qui donne (M, M') et (M', M), ou (N, N') et (N', N), pour les points cherchés.

Si l'on tire la sécante centrale GO qui coupe en D et D' la circonférence OA, en (D, D') et (D', D) la circonférence O(A, A'), on a d'un côté

$$\begin{aligned} G(M, M').\,G(M', M) &= \overline{GC}^2 - \overline{CMi}^2, \\ &= \overline{GC}^2 + \overline{CM}^2, \\ &= \overline{GC}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2, \\ &= \overline{GO}^2 - \overline{OA}^2, \\ &= GD.GD'; \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} G(N, N).G(N', N) &= \overline{GC}^2 - \overline{CNi}^2.\\ &= \overline{GC}^2 + \overline{CN}^2.\\ &= \overline{GC}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{OAi}^2,\\ &= \overline{GO}^2 - \overline{OAi}^2.\\ &= G(D, D').G(D'. D); \end{aligned}$$

et ces conclusions s'étendent à tous les antres cas. D'où il suit que deux droites réelles menées d'un même point à une circonférence de mode quelconque sont coupées par elle en parties réciproques.

C'est ce qu'on exprime encore en disant que, lorsqu'une droite réelle tourne autour d'un de ses points, considéré comme fixe, dans le plan d'une circonférence quelconque, le produit des distances de ce point à ceux où la droite rencontre la circonférence est constant. Ce produit s'appelle, comme on sait, la *puissance* du point fixe relativement à la circonférence donnée.

Les considérations précédentes permettent déjà de résoudre graphiquement l'équation générale du second degré à une inconnue, quel que soit le mode de ses coefficients, et même de prouver que ses deux racines out toujours pour somme le coefficient de la première puissance de l'inconnue pris en signe contraire et, pour produit, le terme tout connu.

En effet, l'équation proposée étant ramenée à la forme

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0,$$

on peut d'abord en déterminer les racines de la manière suivante.

Soient Ox, Oy (*fig.* 52) deux axes rectangulaires d'origine O. Si l'on prend sur Ox, à partir de ce dernier point, le segment droit $OA = a$, la circonférence décrite du point A

comme centre avec AO pour rayon s'exprime par

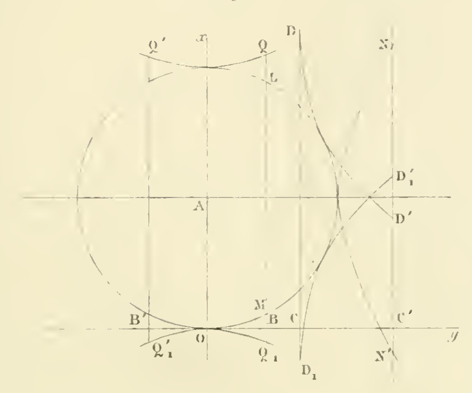
$$(x-a)^2+y^2=a^2,$$

ou

$$x^2-2ax+y^2=0;$$

et l'on voit que, pour $y=b$, les racines de cette équation

Fig. 52.



ne sont autres que celles de la proposée.

Il suit de là que la construction donne :

Pour $b=\mathrm{OB}<\mathrm{OA}$, les racines réelles de même sens

$$x'=\mathrm{BL},$$
$$x''=\mathrm{BM};$$

Pour $b=\mathrm{OC'}>\mathrm{OA}$, les racines mixtes

$$x'=\mathrm{C'}(\mathrm{N},\mathrm{N'}),$$
$$x''=\mathrm{C'}(\mathrm{N'},\mathrm{N});$$

Pour $b=\mathrm{OB}i$, les racines réelles de sens contraires

$$x'=(\mathrm{B},\mathrm{B'})(\mathrm{Q},\mathrm{Q'})=\mathrm{BQ},$$
$$x''=(\mathrm{B},\mathrm{B'})(\mathrm{Q_1Q'_1})=\mathrm{BQ_1};$$

Enfin, pour $b = O(C, C')$, les racines mixtes

$$x'' = (C, C')(D, D'),$$
$$x'' = (C, C')(D_1, D'_1).$$

On voit encore, à l'inspection de la figure, que les racines x', x'', quel qu'en soit le mode, ont constamment pour demi-somme a et pour produit b^2.

Les valeurs imaginaires ou mixtes de a, combinées avec des valeurs quelconques de b, conduisent d'ailleurs à des constructions du même genre.

Comme la conique rectangle, la circonférence comporte une infinité de diamètres réels, et deux de ces diamètres, s'ils sont conjugués, se coupent toujours à angle droit.

Les cordes interceptées sur une droite réelle par toutes les circonférences situées dans le même plan sont évidemment conjuguées de diamètres parallèles entre eux. Lorsque la droite en question, tout en restant parallèle à elle-même, s'éloigne jusqu'à l'infini, les extrémités de ces cordes finissent par se confondre en deux points imaginaires conjugués qu'on appelle *points cycliques*. Les coniques rectangles du plan passent aussi par les mêmes points.

Avant de chercher les intersections de la circonférence et de la droite radiée, il convient de résoudre ce problème pour la conique rectangle.

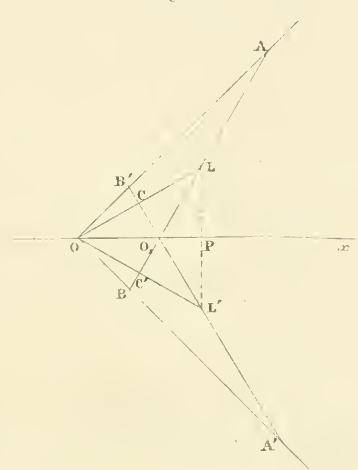
Soient, en conséquence, la conique rectangle O et la droite radiée $O_1(A, A')$ (*fig.* 53) qui ont chacune l'origine réelle et pour axe Ox.

A la seule inspection de la figure, on reconnaît déjà que ces deux lignes se coupent aux points (A, A'), (B, B'); et que leur corde commune a pour composantes les droites égales BA, B'A'. Si l'on mène à ces composantes les perpendiculaires OC', OC, celles-ci sont symétriques par rapport à Ox et leur angle COC' est égal à AO_1B'. Mais, dans le triangle rectangle OAB la perpendiculaire OC' et la médiane

OL menées du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse font des angles égaux avec la bissectrice Ox de cet angle. Donc, OC coïncide avec OL. De même OC′ coïncide avec la médiane OL′ et l'on a de plus OL = LA = OL′ = L′A′.

Il suit de là que les segments radiés O(L, L′), (L, L′)

Fig. 53.



(A, A′) sont perpendiculaires entre eux, et qu'ils sont en outre égaux, mais de modes contraires.

Or, quand la radiée O_1 se meut parallèlement à elle-même sans que son origine réelle cesse d'être sur Ox, la radiée O(L, L′) passe évidemment par les milieux des cordes correspondantes. C'est donc un *diamètre conjugué* de ces cordes; et l'on verrait de même que la parallèle menée par l'origine O à la radiée O_1 est le diamètre conjugué des cordes parallèles à O(LL′).

De là la possibilité de rapporter la conique rectangle à ces diamètres conjugués d'un nouveau genre; et, comme les segments O(L, L′), (L, L′) (A, A′) sont évidemment proportionnels aux distances de leur origine à leur extrémité, si

l'on désigne la première de ces distances par x, la seconde par y, on en conclut pour la conique rectangle la même équation $x^2 + y^2 = 0$ que si les axes étaient réels.

Il est facile de voir en outre que le produit des distances $O_1(A, A')$, $O_1(B, B')$ est constant.

En effet, les distances $O_1(L, L')$, $(L, L')(A, A')$ sont respectivement la demi-somme et la demi-différence des proposées. D'où

$$O_1(A, A').O_1(B, B') = \overline{O_1(L, L')}^2 - \overline{(L, L')(A, A')}^2$$
$$= \overline{O_1(L, L')}^2 + \overline{O(L, L')}^2.$$

Mais si l'on tire LL' qui coupe Ox en P, il vient

$$\overline{O_1(L, L')}^2 = \overline{O_1P}^2 - \overline{PL}^2,$$
$$\overline{O(L, L')}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PL}^2.$$

Donc

$$\overline{O_1(L, L')}^2 + \overline{O(L, L')}^2 = \overline{O_1P}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{PL}^2.$$

Or les antiparallèles OL, O_1L donnent $\overline{PL}^2 = O_1P.OP$. Par suite,

$$\overline{O_1(L, L')}^2 + \overline{O(L, L')}^2 = \overline{(OP - O_1P)}^2 = \overline{OO_1}^2.$$

Donc enfin

$$O_1(A, A').O_1(B, B') = \overline{OO_1}^2.$$

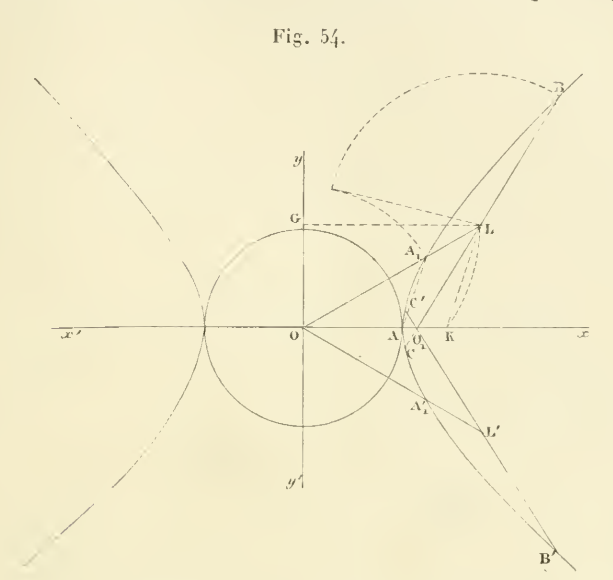
Si, dans la figure précédente, on substitue à la conique rectangle O la circonférence de rayon $OA = r$, ce qui donne la *fig.* 54, le diamètre conjugué de la radiée O_1 est encore $O(L, L')$.

Pour trouver l'intersection de ce diamètre avec la circonférence OA, du point L, par exemple, on abaisse sur Oy la perpendiculaire LG; puis, de G comme centre, avec GL pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe Ox en K; on

tire KL et la parallèle menée à cette droite par le sommet A donne, par sa rencontre en A_1 avec OL, la première composante de l'intersection cherchée.

Il suffit ensuite de mener par L une tangente à la circonférence décrite, du point O comme centre avec OA_1 pour rayon,

Fig. 54.



et de porter cette tangente d'abord suivant LB, LC, puis suivant L'B', L'C', pour obtenir les points de rencontre (B, B'), (C, C') de la radiée O_1 avec la circonférence proposée. Comme on a, d'après cette construction, $\overline{LB}^2 = \overline{OL}^2 - \overline{OA_1}^2$, ou $-\overline{LBi}^2 = \overline{OL}^2 - \overline{OA_1}^2$, on en conclut immédiatement pour les distances O(L, L'), (L, L')(B, B'), $O(A_1, A'_1)$, la relation

$$-\overline{(L, L')(B, B')}^2 = \overline{O(L, L')}^2 - \overline{O(A_1, A'_1)}^2.$$

Si donc on prend pour axes de coordonnées O(L, L') et la parallèle à la radiée O_1 menée par l'origine O, puis qu'on

désigne les distances $O(L, L')$ par x, $(L, L')(B, B')$ par y, en observant de plus que la distance $O(A_1, A'_1)$ est précisément égale à $OA = r$, on trouve encore pour la circonférence OA la même équation $x^2 + y^2 = r^2$ que si les axes de coordonnées étaient réels, et l'on reconnaîtrait, comme plus haut, que le produit $O_1(B, B').O_1(C, C')$ est constant.

Enfin, comme les segments radiés $O(L, L')$, $O_1(L, L')$ (*fig.* 54) sont perpendiculaires entre eux, les triangles $O(L, L')O_1$, $O(L, L')(B, B')$, $O(L, L')(C, C')$ sont rectangles en leur sommet commun (L, L'), et l'on conclut de leurs propriétés métriques que, dans chacun d'eux, le carré de l'hypoténuse est encore égal à la somme de carrés des deux autres côtés.

Il resterait à étendre les considérations précédentes au cas d'une radiée et d'une circonférence quelconque. Mais l'analyse dispense d'entrer dans de longs détails à ce sujet.

En effet, soit $y = mix$ l'équation d'une radiée passant par l'origine d'un système d'axes rectangulaires, et

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

celle d'une circonférence quelconque située dans le plan des axes. Ces lignes se coupent toujours en deux points dont les abscisses x', x'' sont racines de l'équation

$$(x - a)^2 + (mix - b)^2 = R^2$$

ou

$$(1 - m^2)x^2 - 2(a + bmi)x + a^2 + b^2 - R^2 = 0,$$

et dont les ordonnées correspondantes sont $y' = mix'$, $y'' = mix''$.

Si, de plus, on désigne par δ', δ'' les distances de l'origine aux points d'intersection cherchés, on a

$$\delta' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = x'\sqrt{1 - m^2},$$

$$\delta'' = \sqrt{x''^2 + y''^2} = x''\sqrt{1 - m^2}$$

et, par suite,

$$\delta'\delta'' = x'x''(1 + m^2).$$

Or, d'après ce qu'on a dit plus haut,

$$x'x'' = \frac{a^2 + b^2 - R^2}{1 + m^2}.$$

Donc

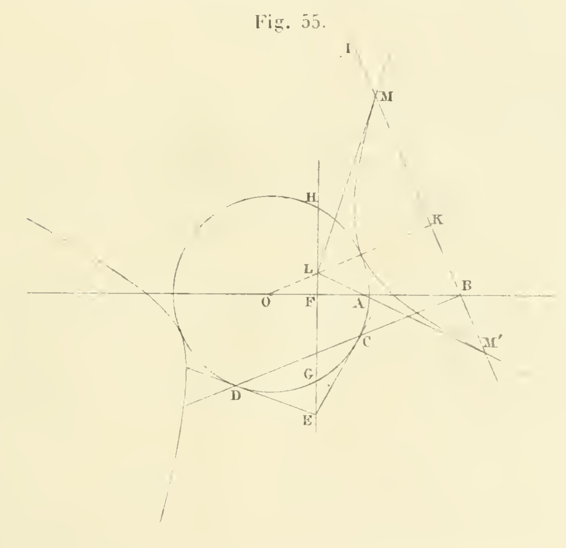
$$\delta'\delta'' = a^2 + b^2 - R^2.$$

En d'autres termes, ce produit est constant.

La circonférence comporte également des tangentes radiées qui ne laissent pas de fournir de nouveaux moyens de généralisation.

On sait, par exemple, que les intersections de la circon-

Fig. 55.



férence OA (*fig.* 55) et d'une droite réelle passant par un point fixe B situé dans son plan, étant les points C et D, si l'on mène par ces points des tangentes à la circonférence jusqu'à leur rencontre en E, le lieu des points E est la per-

pendiculaire EF à la droite OB, et que, réciproquement, si le point E se meut sur EF, les cordes de contacts correspondantes passent toutes par le point B. D'où les noms de *pôle* et de *polaire* donnés à ce point et à la droite EF, relativement à la circonférence OA.

Or, à ne considérer que les tangentes réelles, la polaire en question ne comprend pas la corde GH; mais, dès qu'on tient compte des tangentes radiées, l'anomalie disparaît.

En effet, par le point B, menons une droite quelconque BI qui ne rencontre pas la branche réelle de la circonférence; du centre de celle-ci abaissons sur BI la perpendiculaire OK qui rencontre EF en L; puis, déterminons les points d'intersection (M, M'), (M', M) de la droite BI avec la circonférence donnée et tirons LM, LM'.

On a, par hypothèse, $OB.OF = \overline{OA}^2$. Mais les antiparallèles FL, KB donnent $OB.OF = OL.OK = \overline{OA}^2$. Par suite, les droites LM, LM' sont tangentes à l'hyperbole MM'. Donc, les radiées L(M, M'), L(M', M), sont également tangentes à cette hyperbole considérée comme branche imaginaire de la circonférence OA, et le point L où elles se coupent appartient à la polaire EF.

Au surplus, qu'elles soient radiées ou réelles, les tangentes à la circonférence jouissent toutes des mêmes propriétés.

Ainsi, pour n'en citer qu'un exemple très simple, soit O(A, A') (*fig.* 56) une circonférence imaginaire. Si, d'un point quelconque M, pris sur la direction de OA, on mène une tangente radiée M(N, N') à cette courbe, le point de contact (N, N') appartient à la conjuguée (B, B') dont l'axe est perpendiculaire à O(A, A'), et la corde de contact ou polaire correspondante est la droite réelle NN', perpendiculaire à la direction OA.

Or, les droites ON, MN, d'une part, ON', MN', de l'autre, formant avec cette même direction des angles complémen-

taires, on voit d'abord que la tangente $M(N,N')$ est perpendiculaire au rayon de contact $O(N,N')$. De plus, la similitude des triangles MPN, OPN donne $\overline{PN}^2 = MP.OP$, et par conséquent $-\overline{PNi}^2 = MP.OP$. D'où il suit que la circon-

Fig. 56.

férence décrite sur MO comme diamètre passe par (N,N').

D'un autre côté, la distance $M(N,N')$ est donnée par la formule

$$\overline{M(N,N')}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{PB}^2,$$

puisque $PN = PB$. Mais, à cause de $\overline{PB}^2 = MP.OP$, le triangle MPB est rectangle, et l'on a

$$\overline{MP}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OAi}^2$$
$$= M(A,A').M(A',A).$$

Donc enfin

$$\overline{M(N,N')}^2 = M(A,A').M(A',A);$$

c'est-à-dire que la tangente $M(N,N')$ est moyenne proportionnelle entre les sécantes $M(A,A')$, $M(A',A)$, menées par le point M à la circonférence.

Deux circonférences réelles, imaginaires ou mixtes se coupent toujours en quatre points, dont la construction se

ramène à la recherche, sur la ligne des centres, d'un point d'égale puissance par rapport aux deux circonférences données.

En effet, soient r et r' les rayons de ces courbes; d la distance de leurs centres; x celle de l'un d'eux au point cherché. L'équation qui détermine x est

$$x^2 - r^2 = (x - d)^2 - r'^2.$$

D'où il suit que deux points de la ligne des centres répondent à la question. Comme l'équation ainsi obtenue s'abaisse au premier degré et devient $2dx = d^2 + r^2 - r'^2$, on voit de plus qu'un des points cherchés appartient à la droite de l'infini et que l'autre, donné par la formule

$$x = \frac{d}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2d},$$

se construit sans peine.

Or, si, par ce dernier point, on mène une perpendiculaire à la ligne des centres, puis qu'on détermine les intersections de cette perpendiculaire avec une des circonférences données, ces intersections constituent déjà deux solutions du problème et les points cycliques en sont les deux autres.

La sécante commune dont on vient de parler est réelle ou radiée en même temps que la ligne des centres. Elle jouit de cette propriété que ses points sont tous d'égale puissance par rapport aux circonférences données et se nomme l'*axe radical* de celles-ci.

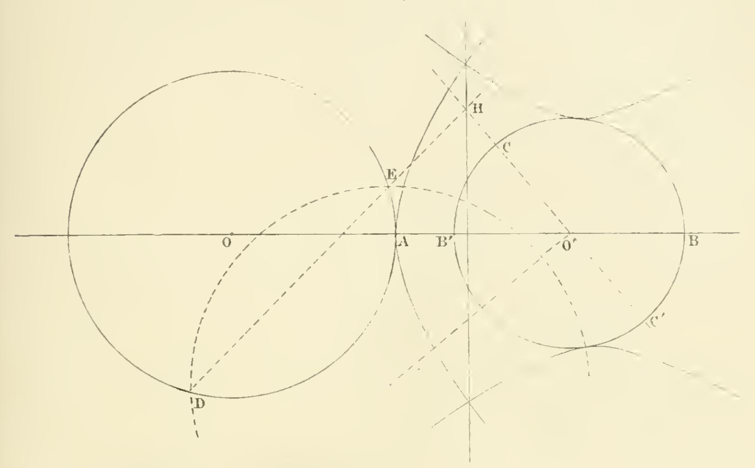
Lorsque trois circonférences se coupent dans un plan, leurs axes radicaux concourent en un même point. Ce point nommé *centre radical* fournit un nouveau moyen de résoudre le problème qui nous occupe.

S'agit-il, par exemple, des circonférences OA, O'(B,B') (*fig.* 57), l'une réelle, l'autre imaginaire?

Par les extrémités (C,C'), (C',C) d'un diamètre de la

seconde on fait passer une circonférence réelle qui coupe la première aux points D, E, et l'intersection H des cordes DE. (C,C') (C',C) est un point de l'axe radical cherché.

Fig. 57.



De même, étant données la circonférence réelle OA et la circonférence mixte O'(B,B') (*fig.* 58), par deux points (C,C') (D,D') de la seconde on fait passer une circonférence réelle qui coupe la première en E, F, et les cordes communes EF, (C,C') (D,D') donnent par leur intersection le centre radical (H,H'), d'où résulte la solution demandée.

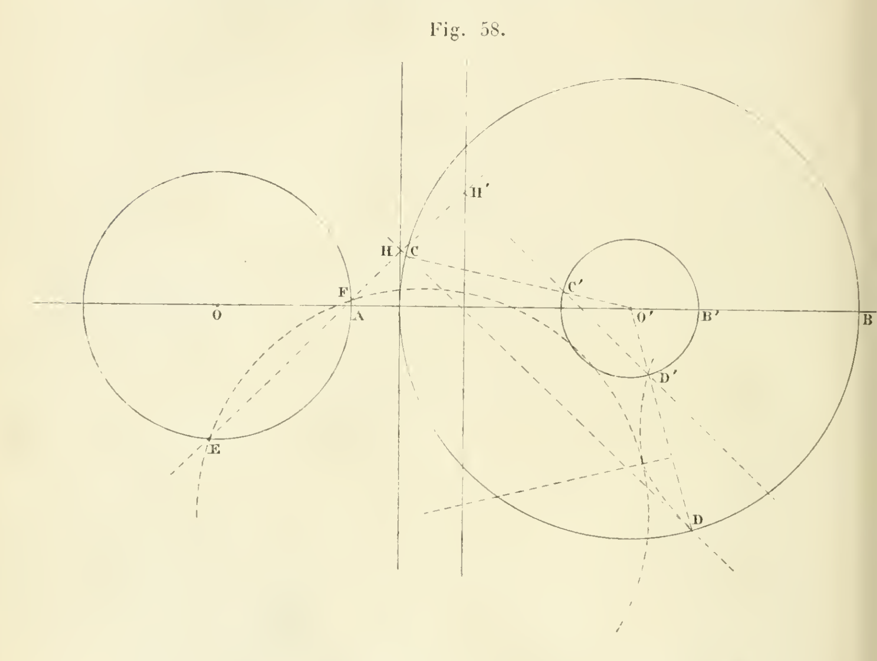
Une circonférence quelconque et la conique rectangle formée par ses asymptotes, ou deux circonférences concentriques n'ont pas d'autre point commun qu'un double contact sur la droite de l'infini.

Enfin, si l'on nomme *foyer* d'une courbe plane le centre d'une conique rectangle, ayant avec elle un double contact, on en conclut que la circonférence a pour foyer son centre même.

Considérée comme faisant partie de la circonférence, l'hy-

perbole équilatère n'y joue qu'un rôle secondaire, celui de conjuguée. Mais elle peut à son tour devenir la première branche d'un lieu géométrique portant le même nom qu'elle.

Fig. 58.



Soient, pour le faire voir, xx', yy' (*fig.* 59) deux axes rectangulaires ; O leur origine ; $OA = r$ le demi-axe transverse ou rayon d'une hyperbole équilatère AA'.

La corde BB' de cette courbe perpendiculaire en son milieu P à l'axe xx' donne

$$\overline{PB}^2 = \overline{PB'}^2 = PA, PA'.$$

Comme les segments PA, PA' ont pour demi-somme OP et pour demi-différence OA, on en conclut

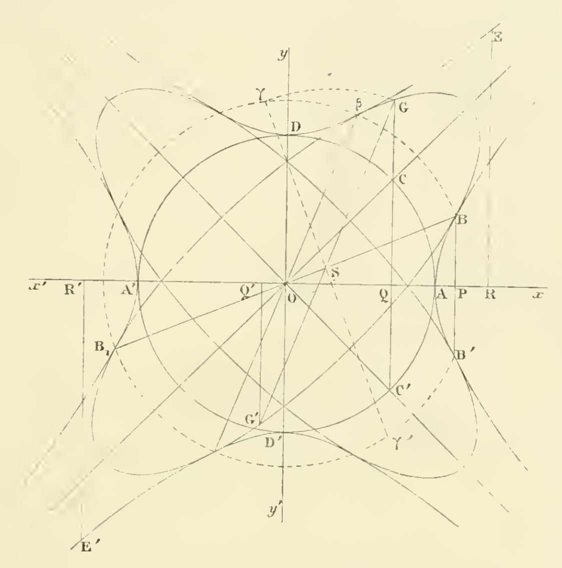
$$\overline{PB}^2 = \overline{PB'}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2;$$

c'est-à-dire, en désignant OP par x et PB par y,

$$y^2 = x^2 - r^2.$$

Cela posé, si l'on admet que le point générateur A devenant imaginaire décrive la circonférence AA', de telle sorte que ses composantes restent symétriques par rapport à xx',

Fig. 59.



on voit que les points conjugués (C,C'), (C',C) de cette nouvelle branche ont pour abscisse commune OQ et pour ordonnées respectives

$$Q(C,C') = QCi, \qquad Q(C',C) = QC'i.$$

Mais on a, d'une part,

$$\overline{QCi}^2 = \overline{QC'i}^2 = -\overline{QC}^2 = QA.QA',$$

d'autre part,

$$QA.QA' = \overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2.$$

Donc enfin

$$\overline{QCi}^2 = \overline{QC'i}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2,$$

c'est-à-dire, en désignant OQ par x et QCi ou QC'i par y,

$$y^2 = x^2 - r^2.$$

Ainsi, les propriétés segmentaires ou métriques de l'hyperbole équilatère OA s'étendent à la branche circulaire de même rayon, pourvu qu'on suppose cette dernière engendrée, comme on vient de le dire.

Même conclusion pour l'hyperbole conjuguée O(D, D'), lorsqu'elle est décrite par le point (D, D'), de telle sorte que les composantes de ce point restent symétriques par rapport à l'origine O.

En effet, le point quelconque (E, E') de la nouvelle branche a pour abscisse O(R, R') = ORi et pour ordonnée (R, R')(E, E') = REi. Mais l'hyperbole réelle CD donnerait

$$\overline{RE}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OA}^2.$$

On a donc identiquement

$$-\overline{RE}^2 = -\overline{OR}^2 - \overline{OA}^2,$$

ou

$$\overline{REi}^2 = \overline{ORi}^2 - \overline{OA}^2;$$

c'est-à-dire, en désignant REi par y et ORi par x,

$$y^2 = x^2 - r^2.$$

Il est encore une infinité d'autres branches jouissant des mêmes propriétés que les précédentes. Ce sont autant d'ellipses ayant chacune avec les deux hyperboles un système de diamètres conjugués commun.

Considérons, en effet, les demi-diamètres conjugués OB, Oβ de l'hyperbole OA.

On sait que ces deux diamètres sont égaux, au mode près, qu'ils font, avec OA, des angles complémentaires, et que l'angle BOA étant désigné par α, on a

$$OB = \frac{OA}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \qquad O\beta i = \frac{OA\,i}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Cela posé, prolongeons OB jusqu'à sa rencontre en B_1 avec la branche $A'B_1$; puis, sur BB_1 comme diamètre, décrivons une circonférence de même nature que OAD. L'abscisse d'un point quelconque (γ, γ') de cette circonférence étant OS et l'ordonnée correspondante $S\gamma i$, ces deux coordonnées satisfont à la relation

$$\overline{S\gamma i}^2 = \overline{OS}^2 - \frac{\overline{OA}^2}{\cos 2\alpha}.$$

Si l'on rabat $S\gamma i$ suivant $SG i$ sur la parallèle SG à $O\beta$, on a donc aussi

$$\overline{SG i}^2 = \overline{OS}^2 - \frac{\overline{OA}^2}{\cos 2\alpha}.$$

Mais, les coordonnées du point (G, G') par rapport aux axes xx', yy' étant $O(Q, Q')$, $(Q, Q')(G, G')$, on trouve aisément

$$SG = \frac{(Q, Q')(G, G')\cos\alpha - O(Q, Q')\sin\alpha}{\cos 2\alpha},$$

$$OS = \frac{O(Q, Q')\cos\alpha - (Q, Q')(G, G')\sin\alpha}{\cos 2\alpha};$$

et la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente donne

$$\overline{(Q, Q')(G, G')}^2 = \overline{O(Q, Q')}^2 - \overline{OA}^2,$$

ou, en désignant $(Q, Q')(G, G')$ par y et $O(Q, Q')$ par x,

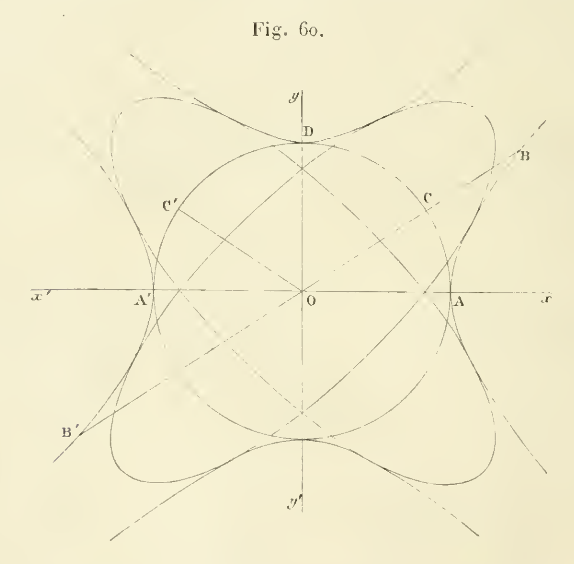
$$y^2 = x^2 - r^2.$$

Si donc on nomme *hyperbole équilatère réelle* l'ensemble de la branche hyperbolique OA et de ses conjugués en nombre infini, on peut dire que, rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, cette courbe est le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre deux segments droits ayant pour différence constante $AA' = 2r$, et qu'elle a pour équation

$$y^2 = x^2 - r^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = r^2.$$

Lorsque le rayon OA devient nul, l'hyperbole équilatère se réduit au système de deux droites réelles, qui sont les bissec-

Fig. 60.



trices des angles formés par les axes, et ce système a pour équation

$$y^2 = x^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Si ce rayon OA devient imaginaire et se transforme en $O(A, A') = ri$ (*fig.* 60), on voit de même que le point (A, A') peut engendrer d'abord une hyperbole équilatère (A, A')

(B, B') dont les points ont leurs composantes symétriques par rapport à l'origine O; puis une circonférence (A, A') (C, C') dont les points ont leurs composantes symétriques par rapport à l'axe yy'; puis une hyperbole réelle OD; puis, enfin, une infinité d'ellipses ayant, comme la branche circulaire, un système de diamètres conjugués commun avec les branches hyperboliques.

L'ensemble de la branche imaginaire $(A, A')(B, B')$ et de ses conjuguées en nombre infini constitue donc une courbe qui, rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, peut se définir le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre deux segments droits différant entre eux de $(A, A')(A', A) = 2ri$.

Mais, bien qu'elle ait une conjuguée réelle, cette nouvelle courbe est imaginaire comme sa première branche. Elle a d'ailleurs pour équation

$$y^2 = x^2 + r^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 = -r^2.$$

Il peut arriver enfin que le rayon de l'hyperbole équilatère soit un segment mixte, tel que $O(A, A') = r + si$ (*fig.* 61).

Si, prenant pour centre l'origine O de deux axes rectangulaires xx', yy', on décrit la circonférence $O(A, A')$, puis que par le point quelconque (B, B') de cette courbe on lui mène une tangente coupant xx' en (P, P') et qu'on rabatte $(P, P')(B, B')$ suivant $(P, P')(C, C')$ perpendiculaire à xx', le lieu des points (C, C') est une hyperbole formée de deux branches équilatères, et la construction donne

$$\overline{(P, P')(C, C')}^2 = (P, P')(A, A').(P, P')(A_1, A'_1).$$

Comme le diamètre $(A, A')(A_1, A'_1)$ est mixte, il en est de même des segments $(P, P')(A, A')$, $(P, P')(A_1, A'_1)$, dont la demi-somme est $O(P, P')$ et la demi-différence $O(A, A')$. On a donc aussi

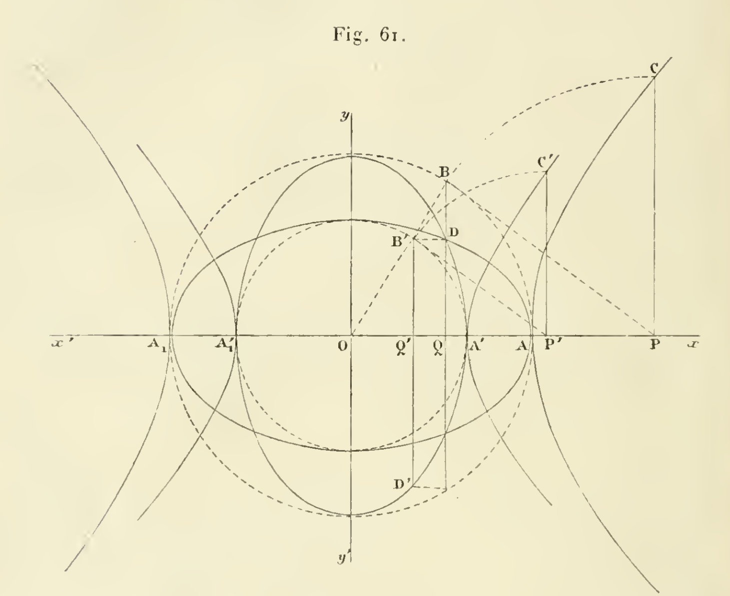
$$\overline{(P, P')(C, C')}^2 = \overline{O(P, P')}^2 - \overline{O(A, A')}^2,$$

ou, en désignant (P, P′) (C, C′) par y et O(P, P′) par x,

$$y^2 = x^2 - (r + si)^2.$$

Soient actuellement O(Q, Q′) l'abscisse, (Q, Q′)(B, B′)

Fig. 61.



l'ordonnée du point quelconque (B, B′) de la circonférence O(A, A′), on a, par construction

$$-\overline{(Q, Q')(B, B')}^2 = (Q, Q')(A, A').(Q, Q')(A_1 A'_1),$$

ou, puisque les deux segments du diamètre ont pour demi-somme O(Q, Q′) et pour demi-différence O(A, A′),

$$-\overline{(Q, Q')(B, B')}^2 = \overline{O(Q, Q')}^2 - \overline{O(A, A')}^2.$$

Mais, si l'on multiplie (Q, Q′)(B, B′) par i, ce qui donne (Q, Q′)(D, D′), il vient

$$-\overline{(Q, Q')(B, B')}^2 = \overline{(Q, Q')(D, D')}^2$$

et, par suite,

$$\overline{(Q,Q')(D,D')}^2 = \overline{O(Q,Q')}^2 - \overline{O(A,A')}^2,$$

ou, en désignant $(Q,Q')(D,D')$ par y et $O(Q,Q')$ par x,

$$y^2 = x^2 - (r+si)^2.$$

En continuant de la sorte on assujettirait aux mêmes conditions d'abord une branche hyperbolique conjuguée de la proposée, puis une infinité d'ellipses ayant avec ces dernières un système de diamètres conjugués commun.

D'où il suit que, si l'on nomme *hyperbole équilatère mixte* l'ensemble de toutes ces branches, on peut dire que, rapportée à deux axes rectangulaires convenablement choisis, la nouvelle courbe est le lieu des points dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre deux segments droits différant constamment entre eux de $(A,A')(A_1,A'_1) = 2(r+si)$, et qu'elle a pour équation

$$y^2 = x^2 - (r+si)^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 = (r+si)^2.$$

La différence constante dont on vient de parler se nomme dans tous les cas l'*axe transverse* ou plus simplement l'axe de l'hyperbole équilatère. Cet axe a pour milieu le *centre* et pour moitié le *rayon* de la courbe. Son diamètre conjugué s'appelle l'*axe imaginaire* de cette courbe.

Lorsqu'on fait tourner chacun des axes de coordonnées de l'angle $-\alpha$ autour de l'origine, l'hyperbole équilatère de rayon quelconque R a pour équation

$$x^2 + 2xy\tang 2\alpha - y^2 = \frac{R^2}{\cos 2\alpha}.$$

Dans le cas particulier où les nouveaux axes sont les asymptotes de la courbe, cette équation se réduit à

$$xy = \frac{R^2}{2}.$$

Rapportée à deux diamètres conjugués dont le premier s'incline de l'angle α sur l'axe transverse, l'hyperbole équilatère se traduit encore en nombres par l'équation

$$x^2 - y^2 = \frac{R^2}{\cos 2\alpha}.$$

Enfin, lorsque le centre de cette courbe, au lieu d'être l'origine, est un point quelconque du plan des axes, il suffit d'exprimer cette particularité dans les équations précédentes pour les rendre générales.

D'après tout ce qu'on vient de dire, l'hyperbole équilatère n'est, à proprement parler, qu'une transformée de la circonférence concentrique de même rayon. Car, cette dernière courbe étant rapportée à deux diamètres rectangulaires, il suffit d'en multiplier l'ordonnée par i pour obtenir l'autre.

Comme il importe de se familiariser, au moins dans les cas les plus simples, avec les transformations de ce genre, soit OA (*fig.* 62) une circonférence réelle rapportée à deux diamètres rectangulaires.

Lorsqu'on multiplie par i l'ordonnée de cette courbe, il est clair que la branche réelle AB et la branche imaginaire A(C, C') se transforment en d'autres branches, l'une imaginaire A(B, B'), l'autre réelle AC'. Mais que devient la branche B(D, D'), par exemple? Pour répondre à cette question, multiplions par i l'ordonnée (P, P')(D, D'), ce qui donne

$$PD_1 = P'D' \qquad \text{et} \qquad P'D'_1 = PD_2 = -PD$$

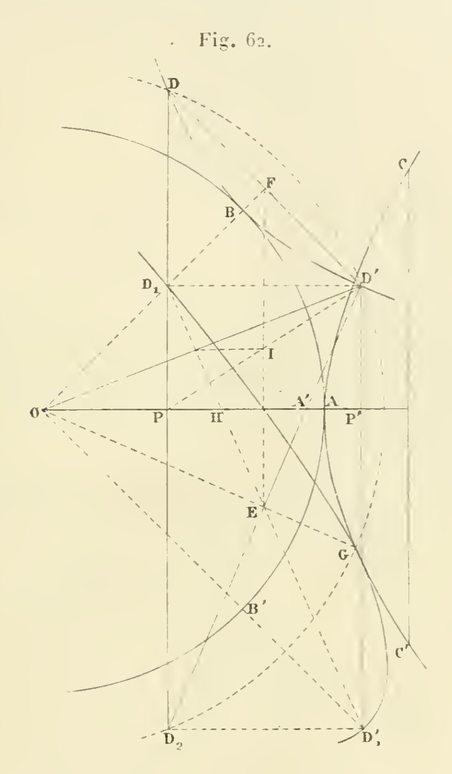
pour composantes respectives du produit. Le point (D, D') se transforme par suite en (D_1, D'_1).

Afin de nous assurer que (D_1, D'_1) fait bien partie de l'hyperbole OA, menons les diagonales du rectangle $D_1D'D'_1D_2$, lesquelles se coupent en leur milieu E, et tirons OE jusqu'à sa rencontre en G avec la branche réelle AC'.

La droite EF, qui joint le milieu de deux côtés du triangle

$D'DD_2$, est parallèle au troisième côté D_2D et coupée en son milieu I par la médiane D'P du triangle. Le point I est aussi le milieu de D'P. De plus, la perpendiculaire élevée en I à EF divise OD' en deux parties égales. D'où il suit que la

Fig. 62.



circonférence circonscrite au triangle rectangle OFD' passe par le point E. Il en résulte que OED' est un triangle rectangle, que $OD'F = OEF$ comme inscrits dans le même segment et qu'on a par suite $D'OF = GOA$.

Or, cette dernière égalité montre que $OG = OD'$ ou que la circonférence décrite de O comme centre avec OD pour rayon passe par les points G et D_2. D'ailleurs $ED' = ED_1$

et l'angle $EHA' = EA'H$ est complémentaire de EOA. Donc, enfin, (D_1, D'_1) est bien un point de l'hyperbole OA.

Observons de plus que l'angle GOD′ étant égal à l'angle AOB, les secteurs circulaires GOD′, AOB sont entre eux comme les carrés de leurs rayons. Mais, si l'on désigne l'angle GOA par α, on sait que

$$\overline{OA}^2 = \overline{OG}^2 \cos 2\alpha.$$

Donc,

$$AOB = GOD' \cos 2\alpha.$$

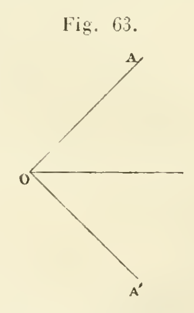
D'un autre côté, les triangles EOD_1, EOD′, sont tels que

$$EOD_1 = EOD' \sin OEH = EOD' \cos 2\alpha,$$

et l'on verrait sans peine que les demi-segments EGD_1, EGD′, l'un elliptique, l'autre circulaire, sont dans le même rapport. D'où l'on conclut $GOD_1 = GOD' \cos 2\alpha$ et par suite $GOD_1 = AOB$, relation bonne à retenir ainsi que l'égalité des angles EOD′, AOB.

Lorsqu'on multiplie par i l'ordonnée d'un point quelconque

Fig. 63.



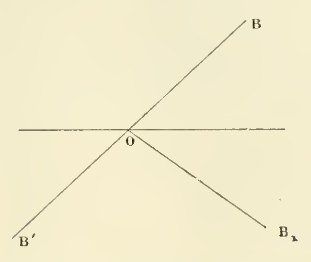
du plan des axes, la distance de l'origine du système à ce point se transforme en un rayon hyperbolique de même valeur.

C'est ainsi qu'aux distances OA, O(B, B′), OC(D, D′) (*fig.* 63, 64, 65) répondent les rayons hyperboliques O(A, A′),

$O(B_1, B')$, $O(C, C')$ (D_1, D'_1), qui leur sont respectivement égaux.

Dans ces transformations, l'hyperbole équilatère dont on

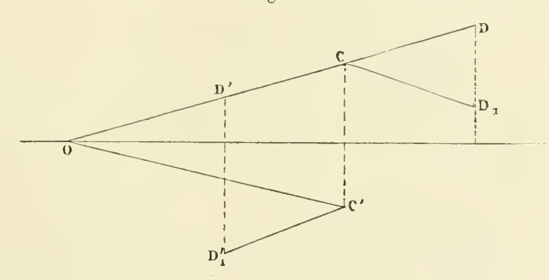
Fig. 64.



se donne un point et le centre n'est complètement déterminée que parce qu'elle a pour axe celui des abscisses.

On peut appeler *distance hyperbolique* de deux points quelconque le rayon parallèle à une direction fixe de l'hyper-

Fig. 65.



bole équilatère ayant pour centre l'un de ces points et passant par l'autre. La valeur numérique de cette distance s'appelle *module* et se désigne par ρ.

Lorsque la direction donnée est celle de l'axe des abscisses, la distance hyperbolique de deux points ayant pour coordonnées rectangulaires x', y', x'', y'' s'exprime par la formule

$$\rho^2 = (x' - x'')^2 - (y' - y'')^2.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère forment une brisée rectangle qui peut être réelle, imaginaire ou mixte. Le segment rectiligne mené du centre de la courbe à ce point prend le nom de *vectrice*.

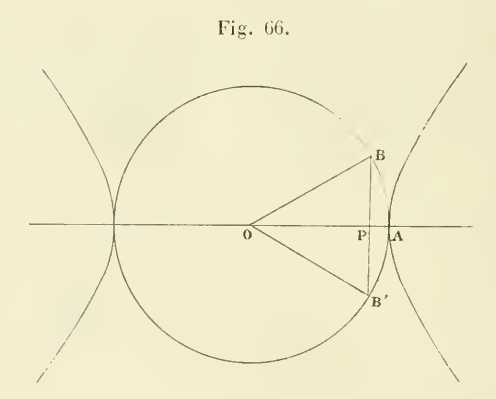
La vectrice équivaut, dans tous les cas, à la somme des parties de la brisée correspondante.

Quoique plus générale que la conception des quantités géométriques, celle des vectrices s'y rattache par certains côtés.

Soit OA le rayon d'une hyperbole équilatère rapportée à ses axes (*fig.* 66).

Tout point (B, B') de la branche circulaire conjuguée de

Fig. 66.



cette courbe a pour abscisse un segment réel OP, pour ordonnée un segment imaginaire P(B, B') = PBi et pour distance hyperbolique à l'origine, ou module.

$$\rho = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PBi}^2} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2}.$$

De plus,

$$O(B, B') = OP + PBi.$$

Or, en remplaçant vectrice et brisée par leurs premières

composantes, on retombe sur la quantité géométrique OB, somme des droites de modes contraires OP et PBi.

Si l'idée de porter les valeurs imaginaires dans une direction perpendiculaire à celle de ses valeurs réelles semble appartenir à Wallis, ce fut, comme on sait, Abraham de Moivre qui reconnut le premier qu'aux multiples successifs de l'angle AOB correspondent les puissances de même degré de la brisée OP + PBi : et cette relation, qui tient à la nature de l'hyperbole équilatère, contribua, certes, plus que l'étroite conception de Wallis, au succès de la doctrine des quantités géométriques développée plus tard par Robert Argand.

Je ferai voir ailleurs que, malgré leur extrême généralité, les vectrices de mode quelconque jouissent, dans un plan comme dans l'espace, des mêmes propriétés que ces dernières grandeurs.

Qu'on la rapporte à deux diamètres conjugués dont l'un s'incline de l'angle α sur son axe, et l'hyperbole équilatère a, comme on sait, pour équation

$$x^2 - y^2 = \frac{r^2}{\cos 2\alpha}.$$

Par le changement de mode de son ordonnée, cette courbe se transforme alors en une ellipse rapportée à ses diamètres égaux, et les axes $2a$, $2b$ de la nouvelle courbe sont dirigés suivant les bissectrices des angles formés par les diamètres.

Rapportée à ses axes, l'ellipse a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et, dès qu'on change le mode de son ordonnée, cette courbe se convertit en une hyperbole quelconque ayant pour axes $2a$, $2bi$, et pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Or, l'équation de la nouvelle courbe, par rapport à ses asymptotes, est

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

On n'a donc plus qu'à remplacer, dans cette dernière équation, b par a, pour revenir à l'hyperbole équilatère et, par suite, à la circonférence.

Observons d'ailleurs que, dans l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, les paramètres a et b peuvent être simultanément réels, imaginaires ou mixtes : que cette équation représente l'hyperbole quelconque, la circonférence ou l'hyperbole équilatère, suivant qu'on y remplace b par bi, par a ou par ai, et que rien n'empêche de regarder comme la première branche de chaque lieu celle qui répond à des valeurs de x, de même espèce que celles de a.

On verrait aisément du reste qu'on arrive à des résultats analogues, en passant de la circonférence à l'hyperbole équilatère, puis en projetant les deux courbes sur des plans passant par un de leurs axes.

Si la circonférence n'admet qu'un seul foyer, l'ellipse et l'hyperbole équilatère ou quelconque en ont toujours quatre situés sur leurs axes et qui sont tantôt réels, tantôt imaginaires.

Considérons, pour le faire voir, l'hyperbole équilatère réelle OA (*fig.* 67) rapportée à ses axes.

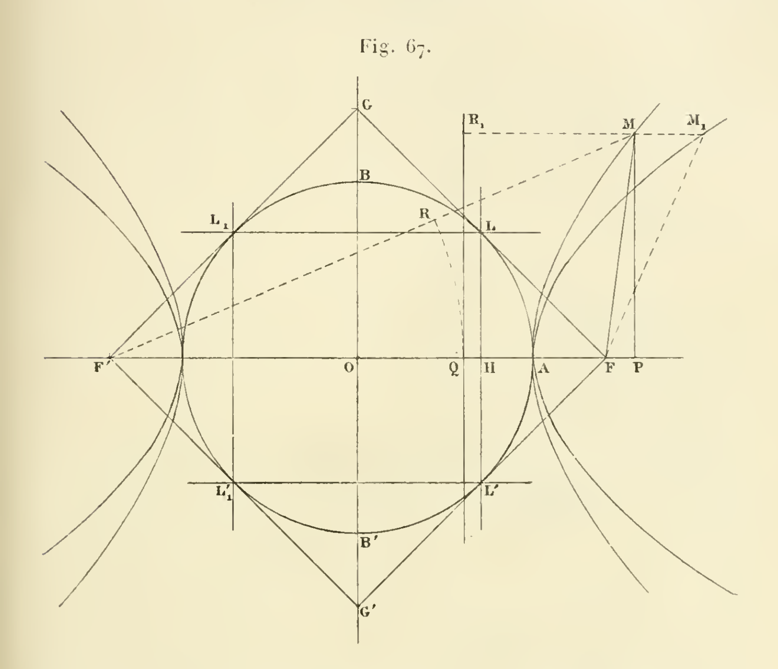
Si l'on circonscrit à la circonférence absolue OA le carré FGF'G', ayant ses sommets sur les axes et touchant cette courbe aux points L, L_1, L'_1, L', on peut évidemment concevoir quatre coniques rectangles imaginaires tangentes à l'hyperbole proposée : la première aux points (L, L'), (L', L); la seconde aux points (L, L'), (L_1, L'_1); la troisième aux points (L_1, L'_1), (L'_1, L_1) et la quatrième aux points (L', L), (L'_1, L_1).

En effet, la première de ces coniques est formée des droites

rectangles $F(L, L')$, $F(L', L)$; la seconde, des droites $F(L, L')$, $F'(L_1, L'_1)$, qui se coupent en $(G. G')$; la troisième, des droites $F'(L_1, L'_1)$, $F'(L'_1, L_1)$, et la quatrième, des droites $F(L', L)$, $F'(L'_1, L_1)$, qui se coupent en (G', G).

Les centres F, (G, G'), F', (G', G) de ces coniques rec-

Fig. 67.



tangles sont donc bien les foyers de l'hyperbole équilatère en question, et cette courbe n'en comporte évidemment pas d'autres. Les polaires ou directrices correspondant à ces foyers sont d'ailleurs la droite LL', la disjointe $(L, L')(L_1, L'_1)$, la droite $L_1 L'$, et la disjointe $(L' L)(L'_1, L_1)$.

Les distances des foyers au centre ont pour valeurs respectives

$$OF = OF' = OA\sqrt{2}, \qquad O(G, G') = O(G', G) = OB\,i\sqrt{2}.$$

Elles sont du reste égales, les unes au module

$$\rho = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OBi}^2},$$

les autres au module

$$\rho' = \sqrt{\overline{OBi}^2 - \overline{OA}^2}.$$

Soit maintenant M un point quelconque de l'hyperbole proposée. Les coordonnées de ce point étant $x = OP$, $y = PM$, on trouve aisément pour ses distances aux foyers F, F'

$$FM = OP\sqrt{2} - OA, \qquad F'M = OP\sqrt{2} + OA,$$

et, par suite,

$$F'M - FM = 2\,OA.$$

Décrivant alors de F' comme centre, avec 2 OA pour rayon, une circonférence qui coupe FF' en Q et F'M en R, il vient

$$F'Q = 2\,OA\,(-1 + \sqrt{2}), \qquad RM = FM.$$

Supposons maintenant que le centre O et le foyer F' s'éloignent de A jusqu'à l'infini, sans que la distance FQ varie; la circonférence F'Q se transforme aussitôt en une droite QR_1, perpendiculaire à QF, et la branche hyperbolique AM est une courbe de même mode AM_1, telle que M_1R_1 parallèle à QF reste égale à FM_1 c'est-à-dire en une *parabole* ayant pour axe QF, pour sommet A, pour foyer F et pour directrice QR. On verrait de même que les conjuguées tangentes à l'hyperbole OA se convertissent en paraboles imaginaires ayant, avec la précédente, un système de diamètres conjugués commun. C'est à l'ensemble de ces nouvelles branches que nous donnerons le nom de *parabole réelle*.

Il suffit d'ailleurs de poser $OA\,(-1 + \sqrt{2}) = p$, puis de traduire en nombres la transformation dont on vient de parler pour conclure de l'équation de l'hyperbole équilatère celle de la parabole réelle, $y^2 = 4px$.

En procédant de même à l'égard des foyers F', (G, G'), (G', G), on trouve une autre parabole réelle et deux paraboles imaginaires exprimées, la première par $y^2 = -4px$ et les deux autres par $x^2 = \pm 4p'y$, où l'on suppose

$$p' = \mathrm{OB}i(-1 + \sqrt{2}).$$

Quand l'hyperbole OA devient imaginaire, ses foyers changent de mode ainsi que les paraboles correspondantes; et, quand elle est mixte, elle se transforme en paraboles mixtes comme elle, tous ses foyers étant alors imaginaires.

En résumé, l'hyperbole équilatère, l'ellipse, l'hyperbole quelconque et la parabole ne sont que des transformées plus ou moins immédiates de la circonférence.

D'après leur constitution même, les coniques coupent toujours l'axe des abscisses en deux points réels ou imaginaires, qui peuvent s'éloigner jusqu'à l'infini et le produit des distances de ces points à l'extrémité d'une abscisse quelconque est au produit des ordonnées répondant à cette abscisse dans un rapport constant. D'où il suit que chacune de ces courbes s'exprime par une équation du second degré à deux variables.

Réciproquement, le lieu de l'équation

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

dont les coefficients sont réels, imaginaires ou mixtes, ne saurait être, dans le système de coordonnées rectangulaires, qu'une des coniques étudiées plus haut.

Comme cette réciproque fait partie du théorème de Newton, dont elle n'est qu'un cas particulier, il est plus simple de démontrer immédiatement ce théorème d'une manière générale.

Soit donc

$$\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1}y + \ldots + \mathrm{E}y^m + \ldots \mathrm{G}x + \mathrm{H}y + \mathrm{K} = 0,$$

l'équation d'une courbe plane de degré m.

Si l'on suppose $y = 0$, l'équation résultante

$$(1) \qquad A x^m \ldots + G x + K = 0$$

a pour racines les abscisses des points où la courbe proposée coupe l'axe des x et le produit de ces abscisses est

$$P_x = \pm \frac{K}{A}.$$

En supposant de même $x = 0$, dans l'équation primitive, on obtient la nouvelle équation

$$(2) \qquad E y^m \ldots + H y + K = 0,$$

dont les racines représentent les ordonnées des points où la courbe en question coupe l'axe des y et le produit de ces ordonnées est

$$P_y = \pm \frac{K}{E}.$$

Divisant membre à membre les équations précédentes, il vient

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{E}{A}.$$

Mais quand les axes de coordonnées se déplacent parallèlement à eux-mêmes, ou qu'on remplace dans l'équation proposée x par $a + x'$, y par $b + y'$, les valeurs des coefficients A et E ne sauraient varier. Donc :

Si, dans le plan d'une courbe algébrique, on mène deux parallèles aux axes de coordonnées, le produit des segments déterminés par la courbe sur l'une d'elles à partir de leur commune intersection est au produit des segments déterminés sur l'autre dans un rapport constant.

Cette démonstration, telle qu'on la donne habituellement, suppose que les intersections de la courbe proposée, soit avec les parallèles en question, soit avec les axes eux-mêmes,

sont toutes réelles. Mais la considération des points et des segments rectilignes de modes contraires ne laisse subsister aucune restriction à cet égard. De plus, la conclusion précédente s'étend même au cas de parallèles disjointes. Car, dans ces formules $x = a + x'$, $y = b + y'$, les constantes a et b peuvent indifféremment prendre des valeurs réelles, imaginaires ou mixtes. La généralité du théorème de Newton se trouve donc ainsi parfaitement établie.

En appliquant ce théorème au système formé de l'axe des abscisses et d'une parallèle à l'axe des ordonnées, on en conclut immédiatement qu'une courbe de degré m coupant l'axe des abscisses en m points, le produit des distances de ces points à l'extrémité d'une abscisse quelconque est au produit des ordonnées répondant à cette abscisse dans un rapport constant. De là, pour $m = 2$, la réciproque qu'il s'agissait de démontrer.

Dans quelle mesure le théorème de Newton servirait-il à définir les courbes de degré m, puis, à les regarder, d'après leurs modes respectifs, comme faisant partie de courbes plus générales, c'est une question qu'on peut se dispenser d'aborder ici, puisque l'extension donnée au système de Descartes permettra toujours de construire le lieu complet de chacune des équations fournies par ces courbes. Je n'ai donc plus qu'une remarque à faire.

Lorsque, pour trouver le lieu d'une équation algébrique $f(x, y) = 0$, on donne à x des valeurs de la forme $a + bi$, en laissant a et b parfaitement arbitraires, on obtient pêle-mêle tous les points cherchés. Mais, dès qu'on établit une relation quelconque entre a et b, ces points se classent en une infinité de branches conjuguées de l'une d'elles. Dans certains cas, il suffit de supposer nul tantôt b, tantôt a, pour en conclure la première branche et l'une de ses conjuguées. Dans d'autres cas, ces mêmes branches répondent à des valeurs de x multiples d'un binôme constant $\alpha + \beta i$. Les

changements d'axes permettent ensuite de trouver les autres conjuguées du lieu. On peut aussi chercher les intersections de ce dernier soit avec une droite réelle se déplaçant parallèlement à elle-même, soit avec une droite quelconque tournant autour de l'origine. L'essentiel est de ne jamais assigner à la variable indépendante une série de valeurs capable de modifier le classement des points du lieu que l'on étudie.

CHAPITRE IV.

AIRES DE MODE QUELCONQUE. — FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Pour être vraiment générale, la conception des deux manières d'être opposées que je désigne sous le nom de modes contraires doit s'étendre sans peine à tous les éléments des figures.

Aussi convient-il de montrer qu'elle ne s'applique pas moins bien aux surfaces planes et aux angles qu'aux points et aux lignes.

Ce sera de plus une occasion de mettre en relief les propriétés de quelques fonctions transcendantes.

Soient xx', yy' (*fig.* 68) deux axes rectangulaires; O, leur origine.

Prenons sur ces axes les longueurs $OA = OA'$, $OB = OB'$; puis, achevons les rectangles OM, OM', OM'', OM''', ayant chacun deux de ces longueurs pour dimensions.

Ce ne sont là que des rectangles absolus, tels que les considère l'Analyse ancienne. Mais il est facile de leur en substituer d'autres susceptibles d'offrir deux sens ou deux modes contraires.

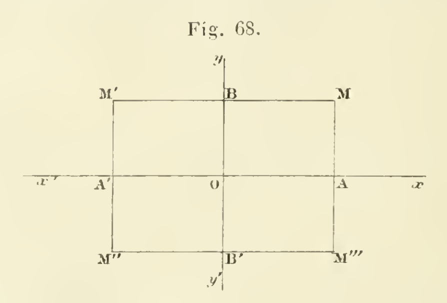
Admettons, en effet, que les droites OA, OB soient réelles et positives.

Lorsque la droite OB se déplace parallèlement à elle-même, de telle sorte que son pied parcourre OA, ses composantes décrivent deux nappes rectangulaires égales et super-

posées dont les composantes de OA sont les bases. Le système de ces nappes est un *rectangle réel-positif* que nous désignerons par OM.

Si l'on multiplie OA par i et qu'on prenne pour base le produit $O(A, A') = OAi$, rien n'empêche d'admettre que les composantes de OB, tout en restant parallèles à elles-mêmes, se séparent de telle sorte que le pied de l'une par-

Fig. 68.



courre OA, celui de l'autre OA', et qu'elles décrivent ainsi deux nappes égales, mais opposées, dont la première réponde à OA. Le système de ces nappes est le rectangle $O(M, M')$.

La multiplication de $O(A, A')$ par i conduit ensuite à la droite réelle-négative OA', qui devient la base d'un nouveau rectangle OM' engendré par OB. Les nappes de ce rectangle sont égales et superposées comme celles de OM ; mais elles présentent avec celles-ci la même opposition de sens que les droites OA, OA'.

Enfin, si l'on multiplie OA' par i, ce qui donne la droite imaginaire-négative $O(A', A) = OA'i$, le rectangle $O(M', M)$ ayant cette droite pour base et pour hauteur OB se compose de deux nappes opposées comme celles de $O(M, M')$, mais dont la première répond à OA'.

Quant au produit de $O(A', A)$ par i, comme il n'est autre que OA, il nous ramène au rectangle OM.

D'après ce qu'on vient de voir, les rectangles de même hauteur OM, $O(M, M')$, OM', $O(M', M)$ ont leurs nappes

proportionnelles aux composantes de leur base et constamment disposées comme ces dernières. Il est donc rationnel d'assigner à chaque rectangle le mode et le sens de sa base. De là, par conséquent, des rectangles réels ou imaginaires pouvant en outre être positifs ou négatifs.

Mais, si l'on prend pour unité la surface du carré construit sur l'unité linéaire, réelle-positive, l'aire du rectangle OM est le produit OA.OB de sa base par sa hauteur ou plutôt des nombres qui les expriment.

Donc, les aires des rectangles O(M, M'), OM', O(M', M) sont respectivement OAi.OB, OA'.OB, OA'i.OB.

Revenons maintenant au rectangle OM et multiplions-en la hauteur par i. La droite imaginaire positive O(B, B') = OBi, qui résulte de cette opération, peut évidemment se déplacer parallèlement à elle-même, de telle sorte que son pied parcourre OA. Elle engendre ainsi le rectangle O(M, M''') formé de deux nappes égales, mais opposées, dont la première répond à OB.

La multiplication de O(B, B') par i produit ensuite la droite réelle-négative OB', génératrice du rectangle OM''', qui se compose de deux nappes égales et superposées de sens contraires à celles de OM.

Enfin, la hauteur O(B', B) = OB'i résultant de la multiplication de OB' par i donne à son tour naissance au rectangle O(M''', M), formé de deux nappes égales, mais opposées, dont la première répond à OB'.

Après quoi, la multiplication de O(B', B) par i nous ramène à la hauteur OB et, par suite, au rectangle OM.

Si l'on observe encore ici que les rectangles de même base OM, O(M, M'''), OM''', O(M''', M), sont entre eux comme leurs hauteurs sous le triple rapport de la valeur absolue, du mode et du sens, on arrive à cette conclusion que les aires des trois derniers sont respectivement OA.OBi, OA.OB', OA.OB'i

Multiplions actuellement par i la base et la hauteur du rectangle OM, ce qui donne les droites imaginaires OAi, OBi, on peut admettre que les composantes de la seconde se déplacent parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que le pied de l'une parcourre OA et celui de l'autre OA$'$. Elles engendrent alors deux nappes rectangulaires symétriques par rapport à l'origine O. Le système de ces nappes, dont la première répond aux composantes OA, OB, forme le rectangle O(M, M$''$).

Les rectangles O(M, M$''$), O(M, M$'$), ayant même base OAi, il vient d'abord

$$\frac{O(M,M'')}{O(M,M')} = \frac{OBi}{OA}.$$

Les rectangles O(M, M$'$), OM, de même hauteur, donnent ensuite

$$\frac{O(M,M')}{OM} = \frac{OAi}{OA};$$

d'où l'on conclut finalement

$$\frac{O(M,M'')}{OM} = \frac{OAi.OBi}{OA.OB}.$$

Comme l'aire du rectangle OM est OA.OB, celle du rectangle O(M, M$''$) est donc $OAi.OBi = -OA.OB$.

La multiplication par i des droites OAi, OBi conduit ensuite au rectangle OM$''$, dont l'aire est $OA'.OB' = OA.OB$. Celle des droites OA$'$, OB$'$ donne également

$$OA'i.OB'i = -OA.OB,$$

pour l'aire du rectangle à dimensions imaginaires O(M$''$, M), après quoi, la même voie nous ramène au rectangle OM.

Ajoutons que, dans les angles yOx', xOy', se trouvent encore les rectangles O(M$'$, M$'''$), O(M$'''$, M), dont les dimensions sont imaginaires, mais dont l'aire est positive.

On peut remarquer en outre que les rectangles à dimensions imaginaires se distinguent à la fois des rectangles réels et des rectangles imaginaires proprement dits : 1° parce que leurs nappes ne sont ni superposées, ni symétriques par rapport à une dimension commune, et qu'une demi-rotation de l'une autour de l'origine l'amène en coïncidence avec l'autre ; 2° parce qu'ils ont, d'une part, l'aire réelle et que, d'autre part, cette aire est négative ou positive, suivant que leurs dimensions sont de même sens ou de sens contraires.

En résumé, l'aire du rectangle est toujours égale au produit de ses dimensions, quel qu'en soit le mode ou le sens ; et l'on verrait sans peine qu'il en est de même pour les rectangles de dimensions mixtes.

Les aires du parallélogramme, du triangle, du trapèze, se déduisent trop aisément de celle du rectangle pour nous arrêter.

On peut en dire autant des secteurs pris dans le cercle ou dans l'hyperbole équilatère. Mais il s'agit de montrer en outre que les premiers fournissent la mesure des angles réels ou imaginaires, et les seconds celle des logarithmes de mode quelconque.

Angles de modes contraires. Leur mesure. — L'angle de deux droites quelconques est celui de leurs tiges. Il a pour composantes respectives les angles que forment entre elles les composantes de même ordre de ces tiges.

Soit O une circonférence réelle de rayon $OA = r$ (*fig.* 69). Elle est coupée en M par la droite réelle OM, et l'angle réel-positif AOM, système de deux angles ordinaires égaux et superposés, a même mesure que sa première composante.

On prend ordinairement pour cette mesure le rapport α de l'arc AM au rayon. Mais rien n'empêche de remplacer ce rapport par un autre qui lui soit égal.

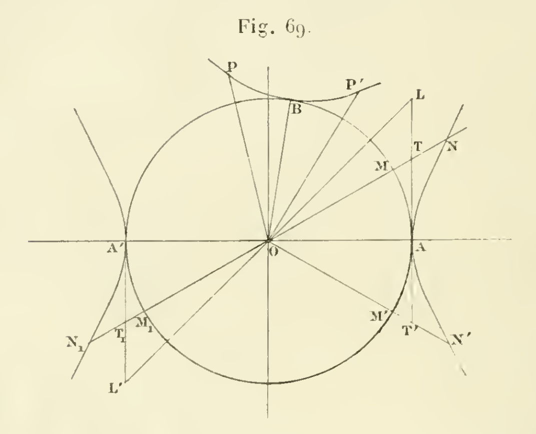
Or, si l'on mène à la circonférence la tangente AT qui

rencontre OM en T et la bissectrice de l'angle des axes en L, l'aire du triangle rectangle isoscèle AOL est $\frac{1}{2}r^2$. Celle du secteur circulaire, AOM $= \frac{1}{2}r^2\alpha$. On a donc

$$\frac{\text{AOM}}{\text{AOL}} = \alpha.$$

C'est ce rapport d'un secteur circulaire au demi-carré con-

Fig. 69.



struit sur le rayon qui va nous servir à mesurer, dans tous les cas, l'angle au centre correspondant.

De plus, comme en posant $\frac{\text{AT}}{\text{OA}} = a$, Leibniz a trouvé que, pour $a < 1$,

$$\frac{\text{AOM}}{\text{AOL}} = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{7}a^7 + \ldots,$$

nous aurons à faire voir que cette formule est générale.

Si l'on multiplie l'ordonnée de la droite OM par i, cette droite se transforme en une radiée O(M, M′) qui rencontre la circonférence proposée en (N, N′). L'angle AO(N, N′) formé des composantes opposées AON, AON′, est imaginaire. Il en est de même du secteur circulaire AO(N, N′)

qui lui correspond et dont l'aire est AONi. La mesure de l'angle AO(N, N') est, par suite,

$$\frac{\text{AON}i}{\text{AOL}}.$$

En désignant toujours le rapport $\frac{\text{AT}}{\text{OA}}$ par a, on a, d'après Huygens, pour $a < 1$,

$$\frac{\text{AON}}{\text{AOL}} = a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7 + \ldots$$

et l'on en conclut identiquement

$$\frac{\text{AON}i}{\text{AOL}} = i\left(a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7 t \ldots\right).$$

Mais cette dernière égalité revient à

$$\frac{\text{AON}i}{\text{AOL}} = ai - \frac{1}{3}(ai)^3 - \frac{1}{5}(ai)^5 - \frac{1}{7}(ai)^7 + \ldots;$$

et, comme l'intersection (T, T') de AT par O(N, N') donne

$$\frac{\text{A(T, T')}}{\text{OA}} = ai,$$

on voit que la formule de Leibniz trouve encore ici son application.

Soit maintenant, dans la circonférence imaginaire de rayon O(A, A'), l'angle au centre (A, A')O(M, M_1). Le secteur correspondant est (A, A')O(M, M_1) = — AOM, et le demi-carré construit sur le rayon devient (A, A')O(L, L') = — AOL. La mesure de l'angle (A, A')O(M, M_1) est, par suite,

$$\frac{-\text{AOM}}{-\text{AOL}} = \frac{\text{AOM}}{\text{AOL}};$$

résultat qui se trouve être en parfaite harmonie avec la figure, puisque les segments OM, O(M, M_1), de la droite réelle OT font avec l'axe OA le même angle que celle-ci.

De plus, la tangente de l'angle $(A, A')O(M, M_1)$ est $(A, A')(T, T_1)$ et son rapport au rayon

$$\frac{(A, A')(T, T_1)}{O(A, A')} = a.$$

Donc, la formule de Leibniz s'applique à ce nouveau cas.

S'agit-il, enfin, de l'angle $(A, A')O(N', N_1)$ que fait avec $O(A, A')$ le segment radié $O(N', N_1)$? On voit que cet angle répond, d'une part, au secteur $(A, A')O(N', N_1) = -\text{AON}i$, d'autre part, au demi-carré $(A, A')O(L, L') = -\text{AOL}$. Il a donc pour mesure

$$\frac{-\text{AON}i}{-\text{AOL}} = \frac{\text{AON}i}{\text{AOL}},$$

ce qui montre que les segments de modes contraires $O(N, N')$, $O(N', N_1)$, d'une même radiée et, par suite, les segments mixtes de cette droite font avec OA des angles égaux. De là, par conséquent, une nouvelle analogie entre la radiée et la droite réelle.

La tangente relative à l'angle $(A, A')O(N', N_1)$ est d'ailleurs $(A, A')(T', T_1)$, et son rapport au rayon

$$\frac{(A, A')(T', T_1)}{O(A, A')} = ai.$$

La formule de Leibniz ne cesse donc pas ici d'être applicable, et l'on verrait aisément qu'il en est de même dans tout autre cas, où la série formée par le second membre de cette formule reste convergente.

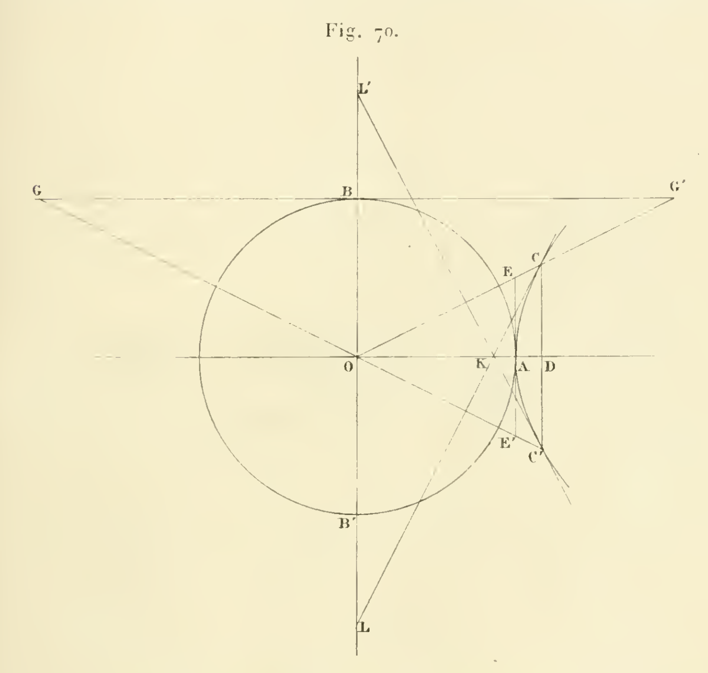
Les angles imaginaires tels qu'on vient de les définir ne sauraient s'étendre au delà des asymptotes correspondantes. Mais, en les combinant avec les angles réels, il est facile de leur faire envahir toutes les régions du plan des axes.

Soient, en effet, (P, P') et (P', P) les intersections de la circonférence réelle OA avec les tiges des radiées $O(P, P')$, $O(P', P)$. La position de ces droites est évidemment déter-

minée dès qu'on regarde leurs tiges comme faisant respectivement avec OA les angles mixtes AOB + BO(P, P'), AOB + BO(P', P) : et la mesure de ces angles est donnée par les secteurs AOB + BOPi, AOB + BOP'i. Quant aux autres branches de chaque radiée, elles forment avec l'axe OA les mêmes angles que leurs tiges respectives.

Ajoutons, enfin, que les dénominations d'angles complémentaires ou supplémentaires ne cessent pas de s'appliquer

Fig. 70.



à deux angles quelconques dont la somme égale un ou deux quadrants.

Les lignes trigonométriques d'un angle imaginaire se définissent absolument comme celles des angles réels, et présentent les mêmes relations mutuelles que ces dernières.

Étant donnés, par exemple, dans la circonférence de rayon

$OA = r$ (*fig.* 70), l'angle imaginaire $AO(C, C') = \alpha i$; son complément $BOA - AO(C, C') = \frac{\pi}{2} - \alpha i$; les coordonnées OD, DCi, du point (C, C'); les intersections (E, E'), (G, G') de la droite O(C, C') avec les tangentes menées par les sommets A, B à la circonférence; enfin, les points K, (L, L'), où la tangente à cette courbe en (C, C') coupe les axes AA', BB', on a

$$\sin \alpha i = \frac{DCi}{OA},$$

$$\text{tang}\, \alpha i = \frac{AEi}{OA},$$

$$\text{séc}\, \alpha i = \frac{OK}{OA},$$

$$\cos \alpha i = \frac{OD}{OA},$$

$$\cot \alpha i = \frac{BGi}{OA},$$

$$\text{coséc}\, \alpha i = \frac{OLi}{OA};$$

et les mêmes constructions donnent entre ces lignes trigonométriques les relations

$$\sin^2 \alpha i + \cos^2 \alpha i = 1,$$

$$\text{tang}\, \alpha i = \frac{\sin \alpha i}{\cos \alpha i},$$

$$\text{séc}\, \alpha i = \frac{1}{\cos \alpha i},$$

$$\cot \alpha i = \frac{\cos \alpha i}{\sin \alpha i},$$

$$\text{coséc}\, \alpha i = \frac{1}{\sin \alpha i}.$$

Les autres formules trigonométriques s'étendent de même aux angles imaginaires.

Étant donnés, par exemple, dans la circonférence de rayon OA $= r$ (*fig.* 71), les angles

$$\text{AO}(\text{M},\text{M}') = \alpha i, \qquad \text{AO}(\text{N},\text{N}') = \beta i,$$

proposons-nous de trouver le sinus et le cosinus de leur somme.

Les données sont

$$\sin\alpha i = \frac{\text{PM}i}{\text{OA}}, \qquad \cos\alpha i = \frac{\text{OP}}{\text{OA}},$$

$$\sin\beta i = \frac{\text{QN}i}{\text{OA}}, \qquad \cos\beta i = \frac{\text{OQ}}{\text{OA}}.$$

Mais les deux dernières peuvent, comme on va le voir, se remplacer par d'autres.

A cet effet, tirons A(M,M') et par le point Q menons à cette radiée une parallèle qui coupe O(M,M') en (C,C'); puis, tirons la corde (C,C')(D,D') conjuguée du diamètre (M,M') et perpendiculaire à ce dernier. Les distances O(C,C'), (C,C')(D,D') sont l'une réelle, l'autre imaginaire et l'on a vu qu'en désignant la première par x, la seconde par y, on a l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

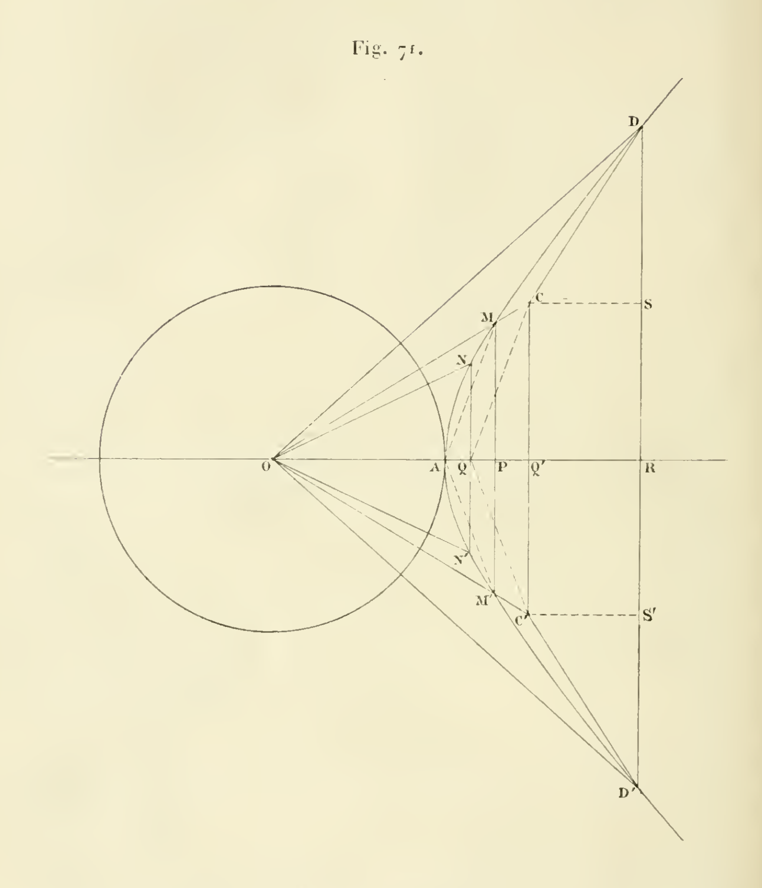
Mais le parallélisme des droites A(M,M'), Q(C,C') prouve que, la distance O(M,M') étant égale à OA, la distance O(C,C') n'est autre que OQ. En sorte qu'on a OQ $= x$, et par suite QN$i = y$. On verrait d'ailleurs aisément que les aires OMDi, OANi sont égales ou que AO(D,D') $= (\alpha + \beta i)$. Enfin, comme les distances x, y, r sont proportionnelles aux segments radiés qui leur correspondent, on peut écrire

$$\sin\beta i = \frac{\text{CD}i}{\text{OM}}, \qquad \cos\beta i = \frac{\text{OC}}{\text{OM}}.$$

Cela posé, si l'on mène d'une part les ordonnées Q'(C,C'),

R(D, D′), d'autre part, la parallèle (C, C′) (S, S′) à OA jus-

Fig. 71.



qu'à sa rencontre en (S, S′) avec R(D, D′), les inconnues du problème sont

$$\sin(\alpha - \beta)i = \frac{\text{Q}'\text{C}i + \text{SD}i}{\text{OA}},$$

$$\cos(\alpha + \beta)i = \frac{\text{OQ}' + \text{CS}}{\text{OA}}.$$

Mais la similitude des triangles OPM, OQ′C donne

$$\frac{Q'C}{PM} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{OC}{OM};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{Q'Ci}{OA} = \frac{PMi}{OA} \cdot \frac{OC}{OM} = \sin\alpha i \cos\beta i,$$

$$\frac{OQ'}{OA} = \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OC}{OM} = \cos\alpha i \cos\beta i.$$

D'un autre côté, la similitude des triangles OPM, CDS, qui ont les angles égaux DCS, OMP, donne

$$\frac{SD}{OP} = \frac{CS}{PM} = \frac{CD}{OM},$$

ou

$$\frac{SDi}{OP} = -\frac{CS}{PMi} = \frac{CDi}{OM};$$

et, par suite,

$$\frac{SDi}{OA} = \frac{OP}{OA} \cdot \frac{CDi}{OM} = \cos\alpha i \sin\beta i,$$

$$\frac{CS}{OA} = -\frac{PMi}{OA} \cdot \frac{CDi}{OM} = -\sin\alpha i \sin\beta i.$$

On a donc finalement

$$\sin(\alpha + \beta)i = \sin\alpha i \cos\beta i + \sin\beta i \cos\alpha i,$$

$$\cos(\alpha + \beta)i = \cos\alpha i \cos\beta i - \sin\alpha i \sin\beta i.$$

Ces relations subsistent pour la somme de deux angles de modes contraires et l'on peut généraliser de même toutes les autres formules trigonométriques.

Observons, en particulier, que les dérivées successives de $\sin x i$, $\cos x i$ s'obtiennent par les mêmes procédés que celles de $\sin x$, $\cos x$; en sorte qu'on a, sans convention aucune,

d'après la formule de Mac Laurin,

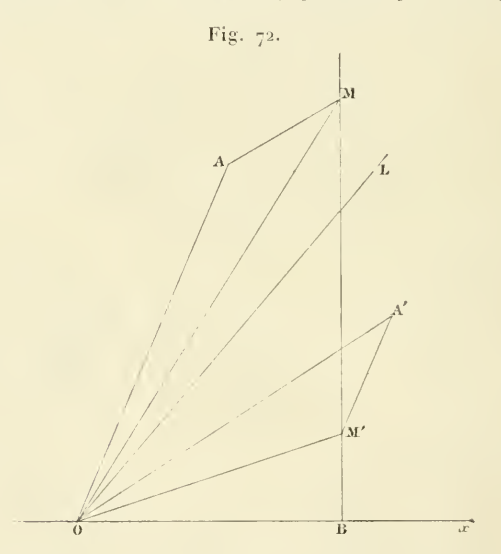
$$(1)\qquad \sin xi = \frac{xi}{1} - \frac{(xi)^3}{1.2.3} + \frac{(xi)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(2)\qquad \cos xi = 1 - \frac{(xi)^2}{1.2} + \frac{(xi)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite quelconque a pour coefficient angulaire la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec l'axe des abscisses.

Ainsi, pour la radiée O(A, A') passant par l'origine des

Fig. 72.



coordonnées et faisant avec Ox l'angle xO(A, A') $= \alpha + \beta i$ (*fig.* 72), il vient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}(\alpha + \beta i) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta i}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta i}.$$

Si l'on veut construire ce coefficient angulaire, il faut prendre OB = 1, mener par B une perpendiculaire à Ox, puis

déterminer l'intersection (M, M′) de la radiée O(A, A′) avec cette perpendiculaire. D'où il suit que la branche de cette radiée qui répond à des valeurs réelles de x est O(M, M′).

Réciproquement, lorsqu'on se donne le segment O(M, M′), on n'a qu'à déterminer l'axe OL et la tige O(A, A′) de la droite dont il fait partie pour obtenir l'angle de cette droite avec Ox.

Il resterait à étendre la mesure des angles au centre à celle des angles inscrits. Mais, comme cette question et toutes celles qui s'y rattachent n'offrent pas de grandes difficultés, je me borne à démontrer directement que deux angles imaginaires inscrits lorsqu'ils sont égaux interceptent un même arc sur une circonférence réelle O (*fig.* 73).

Prenons donc sur cette courbe le point imaginaire (M, M′) ayant son ordonnée perpendiculaire en P au diamètre AB. Les droites absolues BM, BM′, qui coupent la branche réelle de la circonférence, l'une en m, l'autre en m', sont les composantes de la radiée B(M, M′) formant avec BA l'angle inscrit AB(M, M′), et cet angle intercepte entre ses côtés l'arc A(M, M′).

Soit maintenant C un point réel quelconque de la circonférence. Tirons les droites BC, CA, qui sont perpendiculaires entre elles et qui rencontrent la direction MM′ aux points E, D. Puis, par le point P, menons à BC une parallèle qui coupe Cm en N et Cm' en N′. Il est d'abord aisé de voir que la radiée C(N, N′) passe par (M, M′), ou que C(N, N′) (M, M′) est un segment isoscèle mixte de cette droite.

A cet effet, commençons par constater que :

1° Les triangles absolus BMM′, CNN′ sont semblables ;

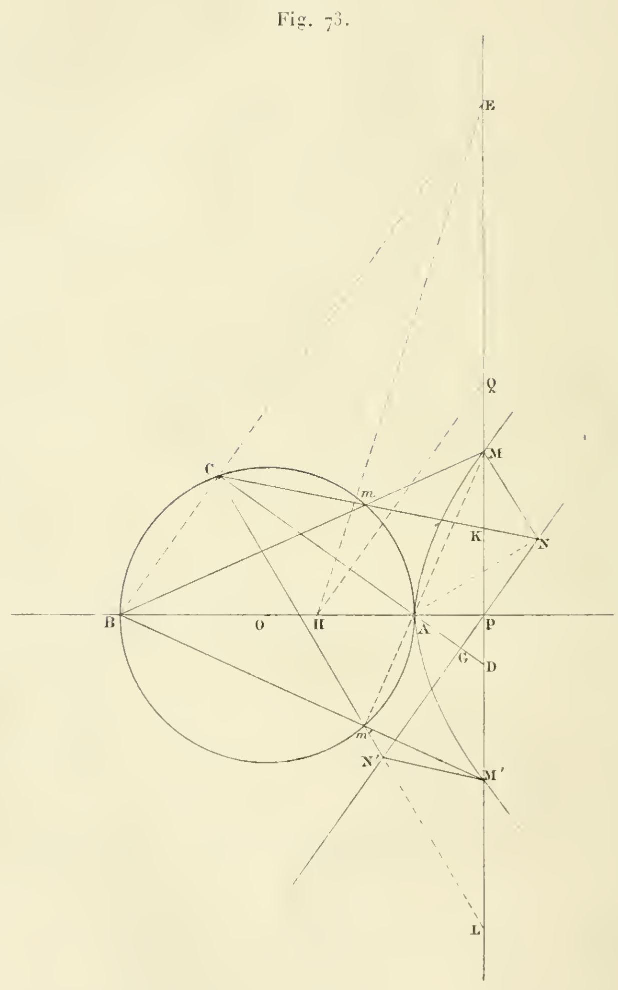
2° Les hauteurs du premier triangle se coupent en A, puisque les cordes MA, M′A sont perpendiculaires l'une en m' à BM′, l'autre en m à BM ;

3° Les hauteurs du second triangle passent aussi par le point A. Car le triangle PGA, semblable au triangle ABC,

donne

$$\frac{AG}{AP} = \frac{CG}{BP}.$$

Fig. 73.



Cela posé, l'égalité des angles AMP, ANP, montre que

la circonférence décrite sur AM comme diamètre passe par le point N.

Donc MN et CN′ sont perpendiculaires à NA et, par suite, parallèles entre elles : et l'on verrait de même que M′N′ est parallèle à CN.

Enfin, si par les points M et M′ on mène des parallèles à NN′ jusqu'à leur rencontre avec CN′ et CN, on prouve aisément que MN = M′N′.

La radiée C(N, N′) passe donc bien par le point (M, M′).

Mais les angles AB(M, M′), AC(N, N′) sont évidemment égaux, et, comme ils sont inscrits dans le même segment, le théorème est démontré.

On sait que les droites réelles CN, CN′, qui font des angles égaux avec CD, coupent la direction MM′ en deux points K, L, conjugués harmoniques des points E et D, et que, par suite, le milieu de DE étant Q, on a

$$\overline{QD}^2 = QK.QL.$$

Il est facile de démontrer que les radiées C(N, N′) et C(N′, N), qui font aussi des angles égaux avec CD, jouissent de la même propriété.

En effet, on a d'abord

$$E(M, M′).E(M′, M) = \overline{EP}^2 + \overline{PM}^2;$$

et, si l'on prend sur PB la longueur PH = PM, on en conclut

$$E(M, M′).E(M′ M) = \overline{EH}^2.$$

Mais la circonférence O donne

$$E(M, M′).E(M′, M) = EB.EC.$$

D'un autre côté, les droites PB et CD étant antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle BED, on a

$$EB.EC = EP.ED.$$

Donc enfin

$$\overline{EH}^2 = EP.ED;$$

c'est-à-dire que la circonférence décrite sur ED, comme diamètre, passe par le point H, ou que QH = QD.

Or, on a évidemment

$$Q(M, M').Q(M', M) = \overline{QP}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{QH}^2.$$

Donc enfin

$$\overline{QD}^2 = QK.QL = Q(M, M').Q(M', M).$$

En d'autres termes, les points K, L, (M, M'), (M', M) font partie d'une involution dont les points doubles sont D, E, et le centre Q.

Il est bon d'observer en passant que les deux radiées B(M, M'), C(N, N'), qui se coupent en (M, M'), forment entre elles un angle réel dont les composantes respectives sont BmC, Bm'C et qui, par suite, est égal à l'angle réel BAC. D'où l'on voit que tous les angles inscrits dans le segment BC sont égaux entre eux et que la circonférence OA est le lieu des points d'intersection de deux droites réelles ou radiées passant l'une par B, l'autre par C et se coupant sous un même angle.

Projections. — Si, par l'origine d'un segment droit ou radié, on mène un *axe* ou droite indéfinie, puis que, par l'extrémité du segment donné, on abaisse une perpendiculaire sur l'axe, le segment compris entre l'origine commune et le pied de cette perpendiculaire est la *projection* du segment donné sur l'axe.

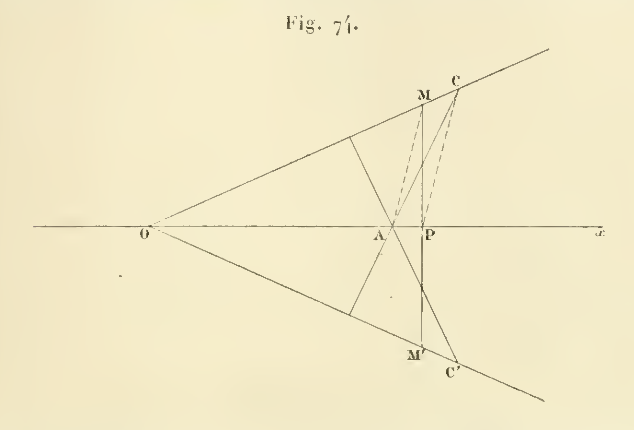
Ainsi, pour projeter le segment radié O(M, M') sur un axe Ox (*fig.* 74), on abaisse la perpendiculaire (M, M')P sur cet axe, et la projection cherchée est OP.

De même, pour obtenir la projection de OA sur l'axe

O(M, M′), on mène A(C, C′) perpendiculaire à O(M, M′), et cette projection n'est autre que O(C, C′).

Si l'on désigne par δ la distance de l'origine à l'extrémité du segment que l'on considère ; par d celle de l'origine à l'extrémité de sa projection sur un axe quelconque, et par A l'angle compris, lequel peut être réel, imaginaire ou mixte, on

Fig. 74.



a constamment pour la mesure de cette projection la formule

$$d = \delta \cos A.$$

Comme, dans la figure précédente, OA mesure la distance O(M, M′), il vient

$$OP = OA \cos AOM\, i,$$

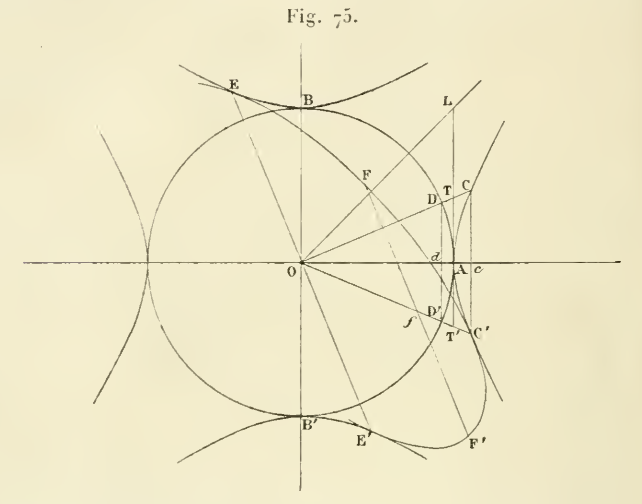
et cette formule est aussi celle de la projection de OA sur O(M, M′), puisque les droites MA, CP étant parallèles en vertu des propriétés de l'hyperbole équilatère, la distance O(C, C′) n'est autre que OP.

Vectrices et logarithmes de modes quelconques. — Soient A, A′, (B, B′), (B′, B) (*fig.* 75) les quatre sommets d'une hyperbole équilatère ayant pour rayon OA = 1 et que nous supposerons rapportée à ses axes xx', yy'. On sait que les

segments rectilignes menés du centre de la courbe à ses divers points s'appellent *vectrices* et s'évaluent autrement que leurs analogues dans la circonférence.

De même, l'angle que fait chaque vectrice avec le rayon OA change de mesure en s'exprimant par le rapport du secteur

Fig. 75.



hyperbolique qu'il intercepte au demi-carré construit sur le rayon et s'appelle le *logarithme* de la vectrice.

Le logarithme d'une vectrice se désigne par la caractéristique l placée devant l'expression de cette dernière.

Ainsi la droite réelle OC, coupant l'hyperbole proposée en C, si, par le sommet A, on mène à la courbe une tangente qui rencontre OC en T et l'asymptote OL en L, on a, par définition,

$$l.\mathrm{OC} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{AOL}}.$$

De plus, en posant $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = a < 1$, il vient, d'après Huygens,

$$l.\mathrm{OC} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{AOL}} = a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \dots.$$

Qu'on multiplie ensuite l'ordonnée de la droite OC par i, et cette droite se transforme en une radiée O(C, C′) qui coupe l'hyperbole en (D, D′). La vectrice OC se remplace alors par la vectrice O(D, D′) : le logarithme $\frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{AOL}}$, par le logarithme $\frac{\mathrm{AOD}\,i}{\mathrm{AOL}}$, et le rapport $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}}$, par le rapport $\frac{\mathrm{A}(\mathrm{T},\mathrm{T}')}{\mathrm{OA}} = ai$. On a dès lors, d'après la formule de Leibniz,

$$
\begin{aligned}
l.\,\mathrm{O}(\mathrm{D},\mathrm{D}') &= \frac{\mathrm{AOD}\,i}{\mathrm{AOL}} \\
&= i\left(a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \ldots\right), \\
&= ai + \frac{1}{3}(ai)^3 + \frac{1}{5}(ai)^5 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Veut-on maintenant trouver le logarithme d'une vectrice telle que O(E, E′) aboutissant à la conjuguée (B, B′) de l'hyperbole?

Si l'on mène le diamètre OC′ conjugué de la direction EE′, on sait que le secteur hyperbolique répondant à cette direction est AOC′ + C′O(E, E′) et qu'on a de plus

$$\mathrm{AOC} = -\mathrm{BOE}, \qquad \mathrm{C'O}(\mathrm{E},\mathrm{E}') = \mathrm{AOB}\,i.$$

Donc,

$$l.\,\mathrm{O}(\mathrm{E},\mathrm{E}') = \frac{-\mathrm{BOE} + \mathrm{AOB}\,i}{\mathrm{AOL}}.$$

On trouverait de même que

$$l.\,\mathrm{O}(\mathrm{E}',\mathrm{E}) = \frac{-\mathrm{BOE} + \mathrm{AOB}'\,i}{\mathrm{AOL}}.$$

Enfin, lorsqu'on prend sur l'hyperbole proposée un point quelconque (F, F′) tel que le diamètre conjugué de la corde (F′, F)(F, F′) soit OC′, on a

$$l.\,\mathrm{O}(\mathrm{F},\mathrm{F}') = \frac{-\mathrm{BOE} + \mathrm{C'OF}\,i}{\mathrm{AOL}};$$

et, pour traduire cette formule en nombres, il suffit de se rappeler que, dans le triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit Of et fF, l'angle opposé à ce dernier côté serait celui du secteur circulaire de rayon OA équivalant au secteur hyperbolique $C'OFi$.

La comparaison des mesures du logarithme et de l'angle au centre montre d'ailleurs qu'à tangentes égales ils s'expriment par des nombres différents, mais qu'ils ont des valeurs égales et de modes contraires, dès que leurs tangentes sont dans ce même rapport.

Les coordonnées de l'extrémité d'une vectrice forment une brisée rectangle qui peut être réelle, imaginaire ou mixte. On sait que, dans tous les cas, la vectrice représente la *somme* des parties de la brisée.

Ainsi, les brisées répondant aux vectrices OC, O(D, D') (*fig.* 75), par exemple, étant OcC, $Od(D, D')$, on ne laissera pas d'écrire

$$OC = Oc + cC,$$
$$O(D, D') = Od + d(D, D')$$

La somme de deux brisées rectangles s'obtient en additionnant entre elles leurs parties de même mode. Les vectrices qui leur correspondent se composent alors cinématiquement et la résultante ainsi obtenue est la *somme* de ces vectrices.

Soit maintenant $OA = 1$ (*fig.* 76) le rayon d'une circonférence rapportée à deux diamètres rectangulaires AA', BB'. On sait qu'en multipliant par i l'ordonnée de cette courbe on obtient une hyperbole équilatère de même centre et de même rayon.

Par le changement de mode de leurs ordonnées, les points quelconques C, (D, D'), (E, E') de la circonférence se transforment en points (C, C'), D', (E_1, E'_1) de l'hyperbole équilatère. Les distances OC, O(D, D'), O(E, E'), toutes égales à l'unité, deviennent en même temps des distances hyperbo-

liques ayant cette unité pour module et répondant aux vectrices $O(C, C')$, OD', $O(E_1, E'_1)$. Enfin, aux angles

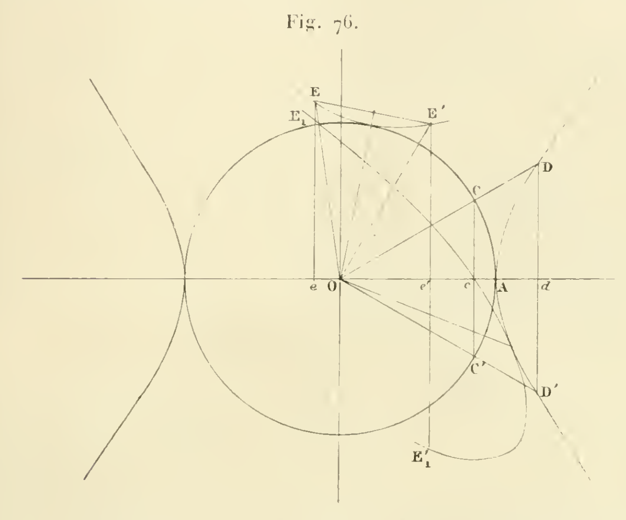
$$AOC = a, \qquad AO(D, D') = \beta i, \qquad AO(E, E') = c + \gamma i$$

succèdent les logarithmes

$$AO(C, C') = ai, \qquad AOD' = -\beta, \qquad AO(E_1, E'_1) = ci - \gamma,$$

produits de ces angles par i.

Fig. 76.



Les coordonnées des points C, (D, D'), (E, E') étaient d'ailleurs

$$OC = \cos a, \quad Cc = \sin a, \quad Od = \cos \beta i, \quad d(D, D') = \sin \beta i,$$
$$O(e, e') = \cos(c + \gamma i), \quad (e, e')(E, E') = \sin(c + \gamma i).$$

On en conclut que les coordonnées des points (C, C'), D', (E_1, E'_1) forment les vectrices respectives

$$O(C, C') = \cos a + i \sin a,$$
$$OD' = \cos \beta i + i \sin \beta i,$$
$$O(E_1, E'_1) = \cos(c + \gamma i) + i \sin(c + \gamma i),$$

et que ces vectrices ont pour logarithmes

$$AO(C, C') = ai, \qquad AOD' = -\beta, \qquad AO(E_1, E_1') = ci - \gamma.$$

D'où il suit qu'une vectrice étant exprimée par

$$\cos\omega + i\sin\omega,$$

son logarithme l'est par ωi.

Si l'on multiplie l'une par l'autre les valeurs

$$\cos\omega + i\sin\omega, \qquad \cos\omega' + i\sin\omega'$$

de deux vectrices quelconques, on trouve pour produit

$$\cos(\omega + \omega') + i\sin(\omega + \omega').$$

Le logarithme $(\omega + \omega')i$ de ce produit est donc égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.

De là les opérations graphiques suivantes :

Veut-on le produit des vectrices $O(C, C')$, $O(D, D')$ (*fig.* 77), on l'obtient en faisant la somme

$$AOCi + AODi = AOEi$$

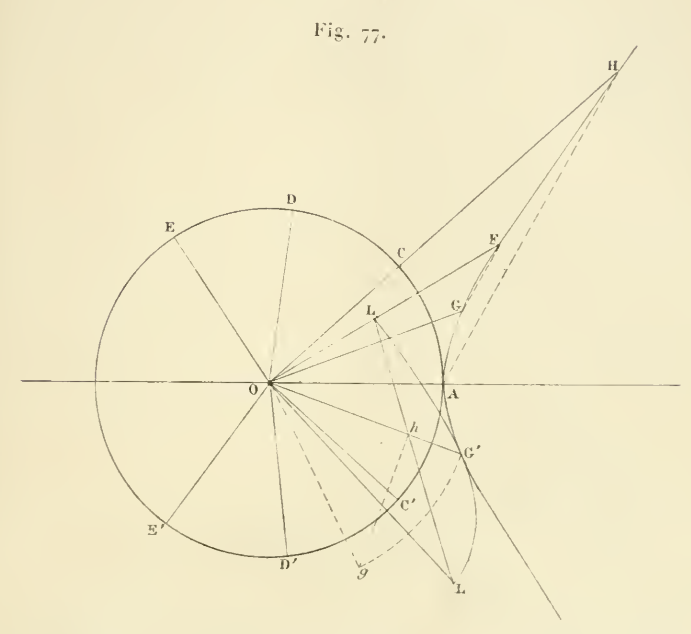
de leurs logarithmes, puis en construisant la vectrice $O(E, E')$ qui répond à cette somme. De même, pour multiplier l'une par l'autre les vectrices OF, OG, il suffit de mener la corde AH parallèle à GF et la vectrice OH est le produit demandé. Enfin, si l'on se propose de multiplier la vectrice OG' par la vectrice $O(C, C')$, il faut décrire, du point O comme centre, avec OG' pour rayon, l'arc de cercle $G'g$ répondant à l'angle au centre $G'Og = AOC$, puis mener gh perpendiculaire sur le diamètre OG', et rabattre cette perpendiculaire suivant hL, hL', sur la direction conjuguée de ce diamètre, ce qui donne $O(L, L')$ pour le produit cherché.

Le produit de m vectrices toutes égales à $\cos\omega + i\sin\omega$ conduit à la formule de Moivre

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^m = \cos m\omega + i\sin m\omega.$$

Cette formule montre que le logarithme de $\cos\omega + i\sin\omega$ étant ωi, celui de $(\cos\omega + i\sin\omega)^m$ est $m\omega i$.

Fig. 77.



Il suit de là que si l'on considère la progression géométrique

$$\cos\omega + i\sin\omega, \quad \cos 2\omega + i\sin 2\omega, \quad \ldots, \quad \cos m\omega + i\sin m\omega,$$

les logarithmes de ces termes forment la progression arithmétique

$$\omega i, \quad 2\omega i, \quad \ldots, \quad m\omega i.$$

On prouve aisément du reste que la formule de Moivre comporte pour m des valeurs fractionnaires ou négatives. D'où la possibilité de remplacer les progressions précédentes par d'autres s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, et telles que la différence de deux termes consécutifs y soit moindre que toute valeur donnée.

L'ensemble des nouvelles progressions constitue le *système* de *logarithmes népériens.*

La vectrice ayant pour logarithme $\omega = 1$ prend le nom de *base* du système et se désigne par e. Sa valeur étant du reste $\cos - i + i \sin - i$, on conclut des formules (1) et (2) trouvées plus haut (p. 126)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

La formule de Moivre admet aussi pour m des valeurs imaginaires ou mixtes. Mais, avant de le faire voir, il importe de simplifier l'expression des angles et des logarithmes, puis de définir les puissances imaginaires de la vectrice ou du nombre qui l'exprime.

On a vu que l'angle, dans la circonférence, et le logarithme, dans l'hyperbole équilatère, ne changent de mode qu'avec leur tangente ou leur second côté.

C'est ainsi que $f(a)$ et $\mathrm{F}(a)$ étant des valeurs respectives de l'angle et du logarithme dont la tangente est a, ces valeurs, par un changement de mode de celle-ci, deviennent l'une $f(ai)$, l'autre $\mathrm{F}(ai)$.

On sait aussi que

$$if(a) = \mathrm{F}(ai), \qquad i\mathrm{F}(a) = f(ai),$$

c'est-à-dire que multiplier un angle ou un logarithme par i, c'est convertir l'angle en logarithme ou le logarithme en angle, et passer de la circonférence à l'hyperbole équilatère, ou *vice versa.*

Mais, dès qu'on se borne à comparer entre eux les angles, d'une part, les logarithmes, de l'autre, on ne tarde pas à reconnaître qu'après avoir désigné l'angle $f(a)$, ou le logarithme $\mathrm{F}(a)$, par ω, on peut sans ambiguïté représenter *symboliquement* $f(ai)$ ou $\mathrm{F}(ai)$ par ωi, ce qui ne laisse pas d'être avantageux.

Les considérations précédentes ne s'appliquent, il est vrai,

qu'aux angles et aux logarithmes dont la tangente est moindre en valeur absolue que l'unité. Mais rien n'empêche de dire que les grandeurs quelconques de l'une et de l'autre espèce changent de mode avec leur tangente ou leur second côté; puis de désigner constamment par ω et ωi deux angles ou logarithmes ayant des tangentes égales et de modes contraires.

Je crois devoir ajouter, au risque de m'écarter sur ce point de l'opinion commune, qu'élever une vectrice à la puissance i, c'est la convertir en une autre vectrice ayant pour logarithme le sien changé de mode, et que la même définition s'applique à la valeur de la vectrice.

Étant données, dans l'hyperbole équilatère de rayon OA = 1 (*fig.* 78), les vectrices O(C, C'), O(C', C), OD, OD', on a donc par définition

$$\overline{\mathrm{O}(\mathrm{C},\mathrm{C}')}^{i} = \mathrm{OD}',$$
$$\overline{\mathrm{OD}'}^{i} = \mathrm{O}(\mathrm{C}',\mathrm{C}),$$
$$\overline{\mathrm{O}(\mathrm{C}',\mathrm{C})}^{i} = \mathrm{OD},$$
$$\overline{\mathrm{OD}}^{i} = \mathrm{O}(\mathrm{C},\mathrm{C}').$$

Si l'on désigne l'angle AOC par ω et cet angle changé de mode par ωi, ces égalités se traduisent en nombre par les suivantes

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^i = \cos\omega i + i\sin\omega i,$$
$$(\cos\omega i + i\sin\omega i)^i = \cos -\omega + i\sin -\omega,$$
$$(\cos -\omega + i\sin -\omega)^i = \cos -\omega i + i\sin -\omega i,$$
$$(\cos -\omega i + i\sin -\omega i)^i = \cos\omega + i\sin\omega.$$

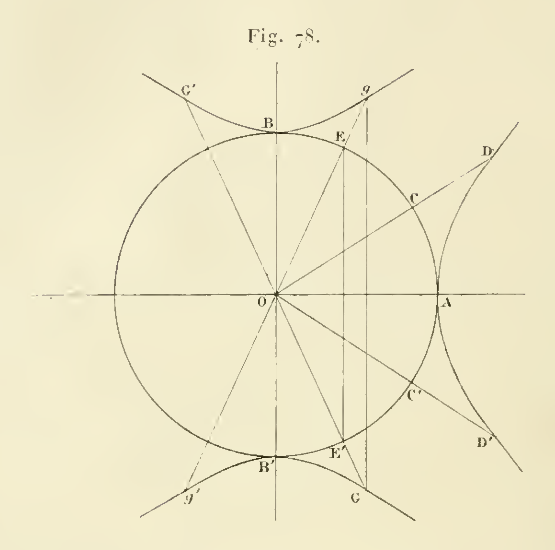
La même figure donne encore pour l'angle AOE dont la tangente excède l'unité

$$\overline{\mathrm{O}(\mathrm{E},\mathrm{E}')}^{i} = \mathrm{O}(\mathrm{G},\mathrm{G}'),$$
$$\overline{\mathrm{O}(\mathrm{G},\mathrm{G}')}^{i} = \mathrm{O}(\mathrm{E}',\mathrm{E}),$$
$$\overline{\mathrm{O}(\mathrm{E}',\mathrm{E})}^{i} = \mathrm{O}(g,g'),$$
$$\overline{\mathrm{O}(g,g')}^{i} = \mathrm{O}(\mathrm{E},\mathrm{E}').$$

relations conduisant à des formules analogues aux précédentes.

Si l'on suppose que le point (E, E') vienne se confondre

Fig. 78.



avec le sommet (B, B'), ces dernières égalités deviennent respectivement

$$\overline{O(B,B')}^{\,i} = O(B',B),$$

$$\overline{O(B',B)}^{\,i} = O(B',B),$$

$$\overline{O(B',B)} = O(B,B'),$$

$$\overline{O(B,B')}^{\,i} = O(B,B')$$

et se traduisent en nombres par

$$i^i = -i,$$

$$-i^i = -i,$$

$$-i^i = i,$$

$$i^i = i,$$

ou, plus simplement, par

$$i^i = \pm i,$$
$$-i^i = \mp i.$$

D'où il suit que i^i et $-i^i$ ont pour logarithmes, l'une, $\pm\frac{\pi}{2}i$; l'autre, $\mp\frac{\pi}{2}i$. Nous aurons à revenir plus loin sur ces résultats.

Élever une vectrice ou le nombre qui l'exprime à la puissance mi, c'est l'élever d'abord à la puissance m, puis à la puissance i, ou *vice versa*.

La valeur numérique de la vectrice étant $\cos\omega + i\sin\omega$, on a, par suite,

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^{mi} = (\cos\omega i + i\sin\omega i)^m$$
$$= \cos m\omega i + i\sin m\omega i.$$

La généralité de la formule de Moivre ne laisse donc plus rien à désirer, car les puissances mixtes d'un nombre quelconque ne sont autres que les produits de ses puissances réelles par ses puissances imaginaires.

Revenons maintenant au système de Néper, afin d'en simplifier autant que possible la construction géométrique.

Soit $OA = \sqrt{2}$ (*fig.* 79) le rayon d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes Ox, Oy, et, par suite, ayant pour équation $xy = 1$.

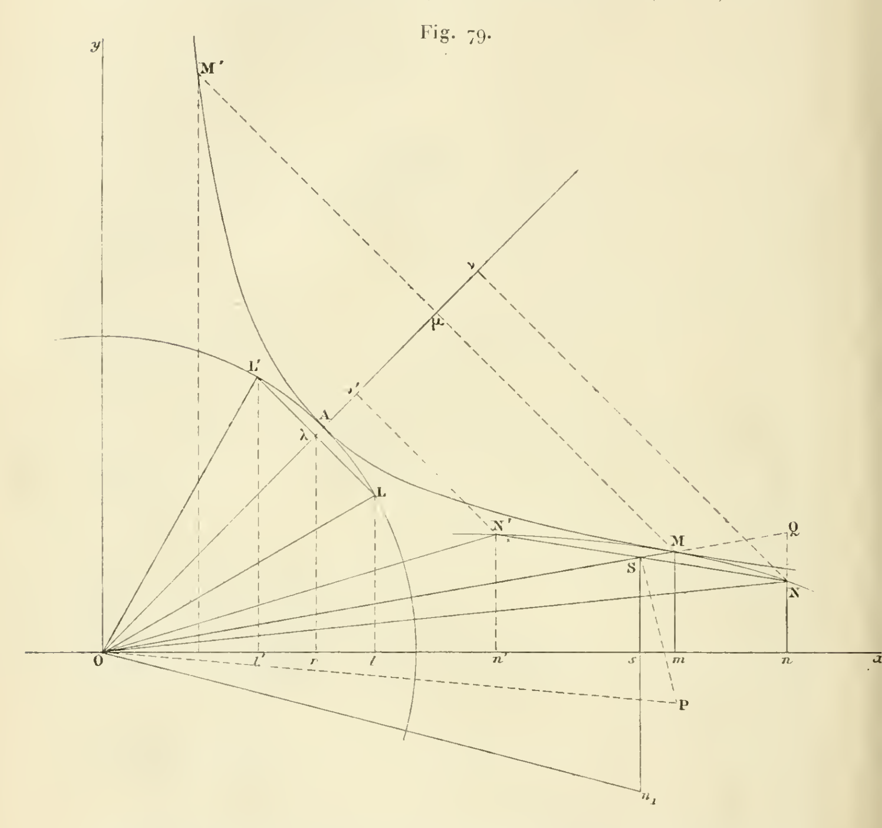
D'après la valeur de OA, le demi-carré construit sur le rayon a pour aire l'unité, et chaque logarithme s'exprime par l'aire même du secteur qui lui correspond.

D'un autre côté, grâce au choix des axes, vectrices et brisées peuvent se remplacer par de simples abscisses.

En effet, si l'on prend sur la courbe les points quelconques (L, L'), M, (N, N'), et qu'on abaisse de ces points les perpendiculaires (L, L')λ, Mμ, (N, N')(ν, ν') sur OA; (L, L')(l, l'), Mm, (N, N')(n, n') sur Ox, il est évident que les brisées Oλ(L, L'), OμM, O(ν, ν')(N, N') sont à la fois les pro-

duits par $\sqrt{2}$ des abscisses $O(l, l')$, Om, $O(n, n')$, et des brisées qui, dans l'hyperbole équilatère de rayon $r = 1$, répondaient aux logarithmes $AO(L, L')$, AOM, $AO(N, N')$. De là

Fig. 79.



l'équivalence de ces dernières brisées et des abscisses correspondantes. En sorte qu'on a finalement

$$l.O(l, l') = AO(L, L'),$$
$$l.Om = AOM,$$
$$l.O(n, n') = AOM + MO(N, N').$$

Dans ce dernier cas, on peut admettre que les logarithmes

AO(L, L'), MO(N, N') soient équivalents : en sorte que, si l'on rabat SN suivant SP perpendiculaire à OM et qu'on tire OP, l'angle MOP soit égal à AOL.

Cela posé, prolongeant OM et nN jusqu'à leur rencontre en Q, on a évidemment SP = SN = SQ. Mais les droites OS, SQ, OM sont par construction proportionnelles aux droites Os, sn, Om. D'où il suit qu'en élevant à Ox la perpendiculaire $sn_1 = sn$ et tirant On_1, on forme un triangle Osn_1 semblable à OSP. Ce qui donne l'hypoténuse On_1 = Om et l'angle sOn_1 = AOL. Il est donc facile de passer de la vectrice O(N, N') à la quantité géométrique On_1 et réciproquement. Or, si l'on désigne On_1 par ρ et sOn_1 par θ, la quantité géométrique On_1 a pour valeur

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Mais telle est aussi la valeur de O$s(n, n')$. De plus, en désignant par α l'angle MOx, on voit que la brisée OS(N, N') s'exprime par $\frac{\rho}{\cos\alpha}(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'addition de pareilles brisées serait facile aussi bien que leur multiplication.

Enfin, on pourrait encore tirer de ces mêmes brisées des quantités géométriques plus générales que celles de Robert Argand. Mais c'est assez insister sur ce point.

Étant donnée l'équation $e^x = a$, on trouve, en égalant les logarithmes des deux membres, $x = l.a$. Donc, le logarithme népérien d'une vectrice est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever e pour obtenir cette vectrice. La *fig.* 79 donne par suite

$$(3)\qquad \begin{cases} Or + rli = \cos\omega + i\sin\omega = e^{\omega i}, \\ Or + rl'i = \cos\omega - i\sin\omega = e^{-\omega i} \end{cases}$$

et l'on en conclut

$$\cos\omega = \frac{e^{\omega i} + e^{-\omega i}}{2}, \qquad \sin\omega = \frac{e^{\omega i} - e^{\omega i}}{2i}.$$

De même, le logarithme AOM $= \omega$ étant le produit par i de l'angle AO(M, M') $= -\omega i$, il vient

$$(4)\qquad \begin{cases} Os + sni = \cos\omega i - i\sin\omega i = e^{\omega}, \\ Os + sn'i = \cos\omega i + i\sin\omega i = e^{-\omega}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\cos\omega i = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \qquad \sin\omega i = \frac{e^{-\omega} - e^{\omega}}{2i}.$$

Ces relations s'étendent d'ailleurs aux angles ainsi qu'aux logarithmes mixtes.

Si, dans les formules (3) et (4), on remplace sinus et cosinus par leurs valeurs en fonction des angles qui leur correspondent, il vient

$$e^{\omega i} = 1 + \frac{\omega i}{1} + \frac{(\omega i)^2}{1.2} + \frac{(\omega i)^3}{1.2.3} + \frac{(\omega i)^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

$$e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

relations dont la seconde seule était démontrée.

La plupart des formules précédentes ont été calculées par Euler, qui sut mettre fin à de longues discussions en prouvant que tout nombre possède une infinité de logarithmes népériens.

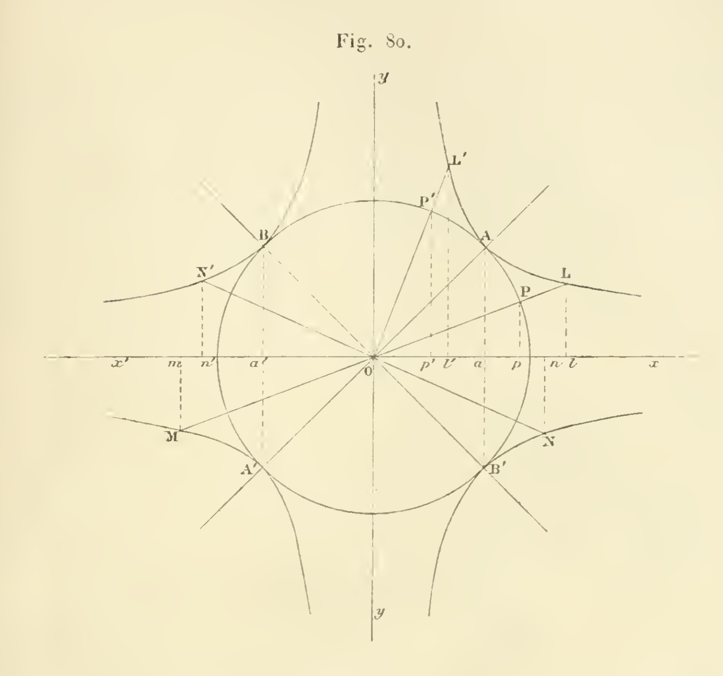
La Géométrie supérieure va nous conduire à la même conclusion, mais toujours en procédant avec plus de rigueur que l'Analyse, puisqu'elle n'a pas besoin, comme celle-ci, d'une foule de conventions pour étayer ses raisonnements.

Revenons, pour le faire voir, à l'hyperbole équilatère de rayon OA $= \sqrt{2}$. Soient xx', yy' ses asymptotes; A, A', (B, B'), (B', B) ses quatre sommets (*fig.* 80).

La projection de OA sur Ox étant $Oa = 1$, on voit d'abord que $l.\,1 = 0$. Mais, l'abscisse Oa restant invariable, le point générateur A peut, en devenant imaginaire, parcourir

une ou plusieurs fois la circonférence A(B, B′)A′. De là la possibilité d'accroître le logarithme népérien de l'unité

Fig. 80.



réelle d'un multiple quelconque de l'aire $2\pi i$ du cercle AA et d'écrire, en adoptant la notation de Cauchy,

$$l((1)) = 2K\pi i,$$

K désignant un nombre entier quelconque ou zéro.

Comme la projection de OA′ sur Ox est $Oa' = -1$, on voit pareillement que, pour aller de A en A′, le point générateur de l'hyperbole doit parcourir d'abord la moitié de la circonférence A(B, B′)A′, puis une ou plusieurs fois cette même circonférence, et l'on en conclut

$$l((-1)) = (2K + 1)\pi i.$$

Les abscisses des sommets (B, B') et (B', B) étant $O(a, a') = i$, $O(a', a) = -i$, on en arrive de même aux formules

$$l((i)) = (2K + \tfrac{1}{2})\pi i,$$
$$l((-i)) = (2K - \tfrac{1}{2})\pi i.$$

Enfin, comme toute droite passant par l'origine O coupe l'hyperbole équilatère en deux points dont l'abscisse peut être réelle, imaginaire ou mixte, il est facile d'en conclure que tout nombre possède une infinité de logarithmes népériens. Car, suivant que la droite en question est réelle ou radiée, les abscisses de ses points d'intersection avec l'hyperbole sont, d'une part, réelles ou imaginaires, comme

$$Ol = a, \quad Om = -a, \quad O(n, n') = bi, \quad O(n', n) = -bi;$$

d'autre part, mixtes comme

$$O(p, p') = c + di.$$

Or, en raisonnant comme on vient de le faire, on trouve aisément

$$l((a)) = l.a + l((1)),$$
$$l((-a)) = l.a + l((-1)),$$
$$l((bi)) = l.b + l((i)),$$
$$l((-bi)) = l.b + l((-i)),$$
$$l((c + di)) = l(c + di) + l((1)),$$

et de même pour tout autre cas.

Il est une dernière question que le calcul semble impuissant à résoudre sans le secours de la Géométrie : c'est la détermination de i^i.

Comme il est certain que

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

Euler ne fait pas difficulté d'en conclure

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

et, par suite,

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

C'est étendre immédiatement la formule de Moivre aux puissances imaginaires des nombres, et la question, comme on l'a vu, n'est pas aussi facile à résoudre qu'elle le paraît au premier abord.

Vallès conteste, non sans raison, l'exactitude des deux dernières formules, puisqu'il en résulterait

$$e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

d'où

$$e^{\pi} = -1,$$

conséquence absurde, et qui ne saurait provenir que d'une fausse hypothèse. Mais il se contente d'interpréter géométriquement les symboles i^i, $-i^i$, sans en faire connaître la valeur.

Or, ainsi que je l'ai fait voir, les logarithmes népériens des nombres i^i et $-i^i$ sont respectivement $\pm\frac{\pi}{2}i$, $\mp\frac{\pi}{2}i$. Il en résulte

$$i^i = e^{\pm\frac{\pi}{2}i}, \qquad -i^i = e^{\mp\frac{\pi}{2}i};$$

et, si l'on applique à ces nouvelles formules le raisonnement de Vallès, on trouve, en prenant simultanément les signes supérieurs ou les signes inférieurs,

$$e^{\pm\frac{\pi}{2}i} + e^{\mp\frac{\pi}{2}i} = 0;$$

d'où

$$e^{\pm\pi i} = -1,$$

résultat exact.

Observons enfin qu'en appliquant aux segments droits la définition donnée plus haut des puissances imaginaires, on

a, par exemple (*fig.* 80),

$$\overset{i}{\mathrm{O}\,l} = \mathrm{O}\,(p,p'),$$
$$\overline{\mathrm{O}\,(p,p')}^{\,i} = \mathrm{O}\,l',$$
$$\overline{\mathrm{O}\,l'}^{\,i} = \mathrm{O}\,(p',p),$$
$$\overline{\mathrm{O}\,(p',p)}^{\,i} = \mathrm{O}\,l;$$

d'où les formules symboliques suivantes :

$$(e^x)^i = e^{xi},$$
$$(e^{xi})^i = e^{-x},$$
$$(e^{-x})^i = e^{-xi},$$
$$(e^{-xi})^i = e^x,$$

dans lesquelles x, xi, $-x$, $-xi$ représentent les logarithmes AOL, AO(P, P'), AOL', AO(P', P), dont les tangentes forment un cycle complet.

Je n'entrerai pas dans de plus longs détails à propos des fonctions transcendantes. Mais on me permettra de clore ce Chapitre par quelques aperçus d'un de nos plus profonds géomètres sur le même sujet.

La théorie des angles considérée en elle-même, dit Poinsot [1], n'appartient pas seulement à la Géométrie, comme on pourrait le croire d'abord; mais c'est encore une partie essentielle de l'Analyse mathématique. Ces quantités remarquables, ou plutôt ces rapports auxquels la Géométrie donne naissance et qu'on nomme les angles, se présentent en Algèbre, d'une manière aussi naturelle et aussi nécessaire que les exposants ou les logarithmes. Par leurs propriétés toutes semblables, elles en sont inséparables. Car si la division du logarithme en parties égales répond à l'extraction de la racine d'une quantité réelle, la division de l'angle en parties égales répond de même à l'extraction de la racine d'une quantité imaginaire. Or, les quantités réelles et celles qu'on nomme imaginaires se présentent également toutes deux dans nos transformations analytiques; elles se mêlent,

[1] Poinsot, *Recherches sur l'analyse des sections angulaires*. Paris, 1825.

pour ainsi dire, à tous nos calculs, et c'est même dans cette combinaison de symboles réels et d'imaginaires que consiste la nature propre de l'Algèbre. On voit donc que cette science, par l'exécution actuelle des opérations qu'elle indique, exige à la fois la considération des angles et celle des logarithmes.

Dans la vue d'abréger les calculs ordinaires de l'Arithmétique, les géomètres ont d'abord imaginé les logarithmes; et, par l'usage particulier de la Trigonométrie, ils ont ensuite construit des Tables de sinus. C'étaient en apparence deux objets différents qu'ils s'étaient proposés; mais on voit qu'ils avaient travaillé, sans y songer, aux deux parties intégrales d'une seule et même théorie. Car une Table de logarithmes à laquelle ne serait pas jointe la Table des sinus serait une Table incomplète pour l'Analyse, l'une et l'autre n'en formant au fond qu'une seule dont elles sont comme les deux moitiés inséparables. A la vérité, ces Tables se trouvent réunies depuis longtemps pour la commodité des calculateurs; mais je veux dire que cette réunion, qui ne paraît due qu'à une sorte de convenance particulière, doit être aujourd'hui regardée comme tenant à la nature même de la science mathématique. Si l'on eût d'abord considéré les choses de ce point de vue général, comme il aurait paru tout aussi naturel et aussi facile d'opérer sur les imaginaires que sur les quantités réelles, les géomètres ne se seraient point arrêtés si longtemps à la considération de ces cas singuliers où les inconnues, quoique réelles, ne se présentent pourtant que sous la forme d'imaginaires, et il est très vraisemblable que le fameux *cas irréductible* n'eût pas même été remarqué.

Je ne présente en passant ces réflexions que dans l'intérêt de la philosophie de la science, partie trop négligée par la plupart des auteurs et peut-être la plus digne d'être cultivée, car nos formules et nos théorèmes les plus remarquables sont bien moins utiles et moins précieux en eux-mêmes que cette sorte de métaphysique qui les éclaire et les domine, et qui seule peut rendre à l'esprit de nouvelles forces, quand il faut se conduire et s'avancer plus loin dans les sciences.

A part une délimitation factice entre la Géométrie et l'Algèbre, il me semble difficile de mieux penser comme de mieux dire.

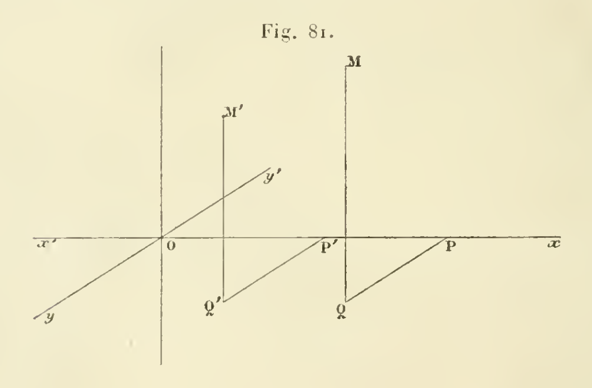
CHAPITRE V.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

La conception des points de modes contraires s'applique aussi bien à la Géométrie de l'espace qu'à la Géométrie plane. Il suffira, pour le faire voir, de quelques exemples.

Lorsqu'on se donne trois axes rectangulaires xx', yy', zz', ayant O pour commune origine (*fig.* 81), la position d'un

Fig. 81.



point réel quelconque de l'espace est déterminée par les droites positives ou négatives x, y, z, qui forment ses coordonnées. Or, rien n'empêche de prendre pour valeurs de x, y, z des segments droits, d'ailleurs réels, imaginaires ou mixtes. Dès lors, la position de tout point imaginaire de l'espace peut être aussi bien fixée que celle d'un point réel.

C'est ainsi que le point quelconque (M, M') est déterminé

par les coordonnées rectangulaires

$$x = O(P, P'), \qquad y = (P, P')(Q, Q'), \qquad z = (Q, Q')(M, M').$$

Ce mode de représentation est d'ailleurs compatible avec tous les changements d'axes en usage.

Comparée au plan xy à l'aide de parallèles à l'axe des z, une surface s'exprime par une équation de la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

les variables x, y, z, étant les coordonnées réelles, imaginaires ou mixtes d'un quelconque de ses points. Le degré de cette équation, lorsqu'elle est algébrique, égale le nombre des intersections de la surface donnée avec chacun des axes.

Commençons par étudier les surfaces du premier degré.

Le plan réel peut être engendré par une droite de même mode, glissant parallèlement à elle-même et rencontrant dans toutes ses positions une autre droite réelle appelée *directrice*. La droite mobile prend de son côté le nom de *génératrice*. Les points réels ou imaginaires des deux droites font partie du plan et l'équation de ce dernier est de la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

les coefficients A, B, C, D étant tous réels.

Lorsqu'un plan réel se disjoint, ses composantes se séparent en restant parallèles. Ces composantes ne cessent pas de contenir celles de même ordre des figures renfermées dans le plan.

L'équation d'un plan réel disjoint ne diffère de celle du plan réel simple que par le mode du terme D, qui devient imaginaire ou mixte.

Un plan peut encore être *radié*.

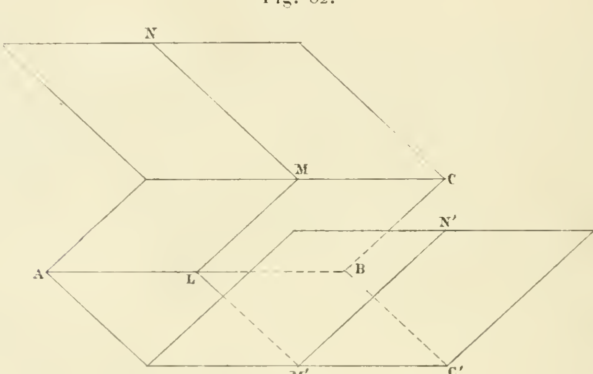
Soient, pour le faire voir, L(M, M') (*fig.* 82) la tige d'une

droite radiée, AB une droite réelle perpendiculaire à son plan.

Si l'on admet que la droite AB se disjoigne, ses composantes peuvent, en glissant parallèlement à elles-mêmes, parcourir des chemins égaux, l'une sur LM, l'autre sur LM'. Elles engendrent alors deux composantes planes de même ordre qu'elles et qui forment la nappe radiée (M, M') AB.

Rien n'empêche ensuite qu'arrivée en (M, M') la droite

Fig. 82.



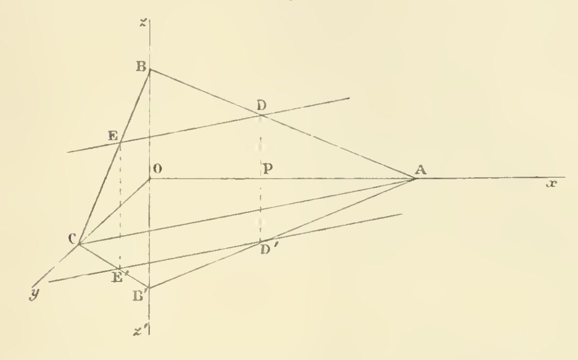
mobile engendre une nouvelle nappe radiée (N, N') (M, M') ayant ses composantes parallèles à celles d'ordre inverse de la première. D'où la possibilité de faire décrire à cette même droite une infinité de nappes radiées répondant aux branches de la droite fixe L(M, M'). L'ensemble de toutes ces nappes prend le nom de *plan radié*. La droite L(M, M') en est la directrice et la droite AB la génératrice.

Il reste à montrer que le plan radié, tel qu'on vient de le définir, s'exprime en coordonnées rectangulaires par une équation du premier degré à trois variables, dont les coefficients sont de mode quelconque.

A cet effet, soit A(B, B') (*fig.* 83) une radiée qui coupe l'axe des z en (B, B') et dont la tige ait, pour plus de simpli-

cité, ses composantes AB, AB′ symétriques par rapport au plan xy. Prenons cette radiée pour directrice et la droite réelle AC du plan xy pour génératrice d'un plan radié.

Fig. 83.



Si l'on désigne OA par n, OC par q, les équations de la directrice A (B, B′) sont

$$y = 0,$$
$$z = mix + n.$$

Celles de la génératrice, dans la position AC, sont pareillement

$$z = 0,$$
$$y = px + q.$$

Enfin, lorsque cette génératrice, glissant parallèlement à elle-même, vient prendre la position (D, D′) (E, E′) déterminée par OP $= \alpha$, P (D, D′) $= \beta i$, ses équations deviennent

$$z = \beta i,$$
$$y = px + \alpha.$$

Pour que la disjointe (D, D′) (E, E′) rencontre A (B, B′), il faut que leurs équations soient satisfaites par les mêmes valeurs des variables. De là l'équation de condition

$$p\beta i + mi\alpha = pn.$$

Éliminant alors α et βi entre cette équation et celles de (D, D′) (E, E′), on trouve

$$pz + mi(y - px) = pn$$

pour l'équation du plan proposé, et tout autre plan radié donnerait une équation du même genre.

Parmi les quadriques ou surfaces du second ordre, la plus importante est la sphère dont toutes les autres peuvent se déduire. Aussi l'étudierons-nous spécialement.

Soient OA, OB (*fig.* 84) deux circonférences réelles égales, ayant pour centre commun l'origine O des coordonnées, et comprises l'une dans le plan zx, l'autre dans le plan xy.

Prenons la première de ces courbes pour directrice et la seconde pour génératrice, mais à condition que cette dernière, tout en glissant parallèlement à elle-même, de telle sorte que son centre reste sur Ox, ait constamment pour diamètre la corde correspondante de la directrice. Dans ce ce cas, sa première branche engendre entre A et A′ une nappe sphérique dont tous les points sont réels et dont le rayon est $OA = OB = r$.

Soit CEDE′ la position de cette première branche répondant à l'abscisse réelle $x = OC < OA$.

Les coordonnées d'un point quelconque F de la courbe par rapport aux axes CD, CE étant $Cf = y$, $fF = z$, on a, d'après les propriétés segmentaires de la circonférence,

$$y^2 + z^2 = \overline{CE}^2.$$

Mais la directrice OA, de son côté, donne

$$x^2 + \overline{CE}^2 = r^2.$$

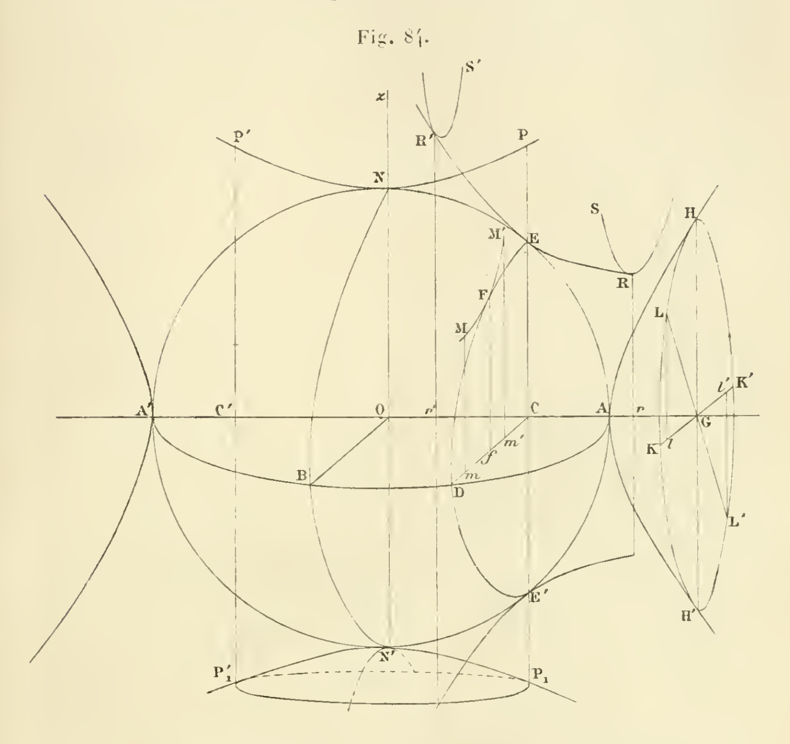
Donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

est l'équation par rapport aux axes choisis de la nappe sphérique AA'.

En continuant de s'éloigner du plan yz, la première branche

Fig. 84.



de la génératrice finit par arriver en A où elle se réduit à ce point.

Lorsque le plan mobile dépasse le point A et que sa distance au centre de la sphère est $x = \mathrm{OG}$, par exemple, sa trace sur zx rencontre la directrice en un point imaginaire (H, H') dont les composantes sont symétriques par rapport à xx'.

Étant donnée dans ce plan mobile la circonférence de centre G et de rayon G(H, H'), il est facile de voir que les

coordonnées d'un point quelconque (L, L') de cette circonférence satisfont à l'équation de la sphère.

En effet, soient HH', KK' deux axes rectangulaires pris dans le plan mobile; $y = G(l, l')$, $z = (l, l')(L, L')$, les coordonnées du point (L, L') relativement à ces axes. On a, par hypothèse,

$$y^2 + z^2 = \overline{GHi}^2.$$

Mais la directrice donne

$$x^2 + \overline{GHi}^2 = r^2.$$

D'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Or, d'après la loi qui règle ses variations, la première branche de la génératrice OB, dès qu'elle dépasse le point A, se transforme en une circonférence telle que G (H, H'). Elle engendre alors un hyperboloïde ayant pour directrice A (H, H') et dont tous les points ont leurs composantes symétriques par rapport à xx'. Mais, d'après ce qu'on vient de dire, les coordonnées de ces points vérifient l'équation de la sphère. D'où la possibilité de regarder l'hyperboloïde en question comme une nappe imaginaire du lieu. Je l'appelle en conséquence une *conjuguée sphérique du premier genre*.

Outre sa branche réelle, la génératrice comporte, comme on sait, une infinité de branches imaginaires. Celles-ci, dans leurs transformations successives, engendrent autant d'hyperboloïdes à une nappe tangents à la sphère AA' suivant des circonférences de grand cercle. Chacun de ces hyperboloïdes peut d'ailleurs être considéré comme faisant partie du lieu. Car, la génératrice occupant la position CED, par exemple, les coordonnées $y = C(m, m')$, $z = (m, m')(M, M')$ d'un quelconque (M, M') de ses points donnent

$$y^2 + z^2 = \overline{CE}^2$$
$$= r^2 - x^2.$$

De là, par conséquent, une infinité de nouvelles *conjuguées sphériques* que j'appelle *du second genre*. Toutes ces conjuguées viennent d'ailleurs passer par le point A où la génératrice se réduit à une conique rectangle ; puis, après leur coïncidence avec cette dernière, elles ont pour enveloppe la conjuguée du premier genre A(H, H').

Admettons maintenant que, dans sa position initiale NBN', le plan de la génératrice se disjoigne et que ses nappes, tout en restant parallèles à yz, viennent couper l'axe xx' l'une en C, l'autre en C', le point (C, C') ayant ses composantes symétriques par rapport à l'origine O. Comme la trace sur zx du plan disjoint (C, C') rencontre la directrice en (P, P'), la génératrice OB se transforme en une circonférence réelle ayant pour centre (C, C') et pour rayon (C, C')(P, P') ou CP. Les coordonnées de ses points satisfont encore à l'équation de la sphère. De plus, en passant d'une position à l'autre, elle engendre d'une part une conjuguée du second genre ayant pour cercle de gorge NBN', d'autre part une infinité de conjuguées du premier genre répondant aux branches imaginaires du même cercle. Ces dernières ont chacune pour axe transverse le diamètre mené de l'origine des coordonnées à leurs points de contact avec la sphère AA' et les composantes de leurs points sont symétriques par rapport à cet axe. Exemple :

$$N'(P_1, P'_1).$$

Revenons enfin à la position réelle quelconque CEDE' de la génératrice et soit E(R, R') la branche directrice passant par le point E. Si l'on mène (R, R')(r, r') perpendiculaire à xx', on voit aisément que les coordonnées de tous les points de la circonférence mixte ayant pour centre (r, r') et pour rayon (r, r')(R, R') vérifient l'équation de la sphère. Lorsque le plan de la génératrice passe de C en (r, r'), la première branche CEDE' donne naissance à une nappe hyperboloïdale qu'on pourrait obtenir par la rotation de E(R, R') autour de xx'.

J'appelle cette nappe une *conjuguée sphérique du troisième genre*. En même temps, les conjuguées de la génératrice deviennent celles d'une circonférence mixte et décrivent une infinité de nappes ayant pour directrices les positions correspondantes de E(R, R'). Ces nappes qui, par leur mode de génération, se distinguent essentiellement de toutes celles que nous venons d'étudier, s'appellent *conjuguées sphériques du quatrième genre*. La nappe dont la directrice est E(R, R') et dont la génératrice est la conjuguée mixte (R, R')(S, S'), par exemple, appartient à cette nouvelle et dernière catégorie.

L'ensemble de la nappe sphérique AA' et de toutes ses conjuguées prend le nom de *sphère réelle*. Cette sphère a pour *centre* l'origine O des coordonnées et pour rayon

$$OA = r.$$

Si l'on remplace les circonférences réelles OA, OB, par les circonférences imaginaires O(A, A'), O(B, B'), sans que les conditions auxquelles la génératrice est soumise soient en rien modifiées, on obtient une *sphère imaginaire* dont les nappes sont les mêmes que celles de la sphère réelle sous le rapport de la forme et n'en diffèrent que par la disposition des composantes de leurs points.

C'est ainsi que, dans la nouvelle sphère, les points de la nappe qui remplace AA' ont leurs composantes symétriques par rapport au centre; que ceux de la nappe répondant à A(H, H') ont leurs x imaginaires au lieu d'être réels, leurs z réels au lieu d'être imaginaires, et ainsi de suite.

Enfin, lorsqu'on part d'une directrice et d'une génératrice mixtes, la sphère qu'elles engendrent est de même mode qu'elles, ses nappes peuvent encore se construire sans trop de difficulté; mais elles sont naturellement plus compliquées que celles des autres sphères.

L'équation d'une sphère quelconque ayant pour centre un

point dont les coordonnées rectangulaires $x = a, y = b, z = c$ sont réelles, imaginaires ou mixtes, est d'ailleurs

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Lorsque le rayon r, quel qu'en soit le mode, s'annule, la sphère se transforme en un cône rectangle imaginaire dont les nappes sont asymptotes aux siennes et dont le sommet est le centre.

Je crois avoir assez montré par ces exemples que l'emploi des points de modes contraires a son utilité pour les surfaces comme pour les lignes planes. Aussi, pour terminer cette étude, n'ai-je plus qu'à dire encore quelques mots des distances et des vectrices telles que je les ai définies pour le plan.

La distance de deux points de l'espace est le rayon de la sphère ayant l'un de ces points pour centre et passant par l'autre.

Si les points donnés ont pour coordonnées rectangulaires, l'un x', y', z'; l'autre x'', y'', z'', leur distance δ est donc fournie par la formule

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

La distance de deux points de l'espace peut toujours se construire à l'aide des coordonnées rectangulaires de ces points.

Soient, par exemple, Ox, Oy, Oz (*fig.* 85) trois axes rectangulaires; (M, M') un point quelconque de l'espace;

$$x = \mathrm{O(A, A')}, \qquad y = \mathrm{(A, A')(B, B')}, \qquad z = \mathrm{(B, B')(M, M')},$$

les coordonnées de ce point.

Si l'on détermine la distance (A, A') (M, M') et qu'on rabatte cette distance suivant (A, A') (m, m') perpendiculaire à Ox dans le plan zx, il ne reste plus qu'à construire le rayon de la circonférence ayant pour centre le point O et passant

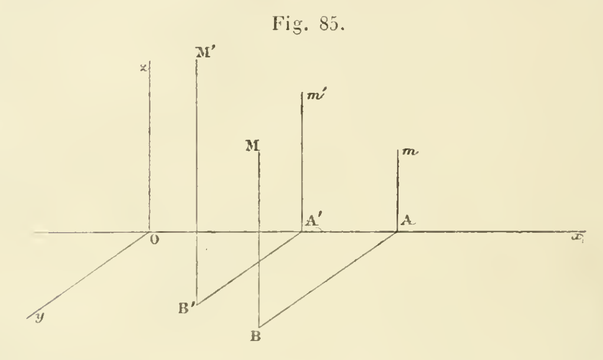
par (m, m') pour obtenir la distance cherchée $O(M, M')$.

En effet, si l'on désigne par δ la distance $O(m, m')$, il vient

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \overline{O(A, A')}^2 + \overline{(A, A')(m, m')}^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \overline{O(M, M')}^2.\end{aligned}$$

L'angle de la distance $O(M, M')$ avec l'axe des x est d'ail-

Fig. 85.



leurs celui de la droite $O(m, m')$ avec ce même axe. En sorte qu'en désignant cet angle par α, on a

$$x = \delta \cos \alpha.$$

On peut remarquer aussi que les distances de l'origine O à tous les points de la circonférence de centre (A, A') et de rayon $(A, A')(m, m')$ sont égales entre elles et qu'ayant chacune $O(A, A)$ pour projection sur Ox, elles font toutes avec cet axe le même angle α.

Désignant par β, γ les angles que la distance $O(M, M')$ fait avec Oy, Oz, on a de même

$$y = \delta \cos \beta, \qquad z = \delta \cos \gamma;$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\delta^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \delta^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\end{aligned}$$

quelles que soient les valeurs de δ et des angles α, β, γ.

On en conclut, du reste,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

comme dans le cas d'angles réels.

Si l'on projette sur O(M, M') la brisée

$$O(A, A')(B, B')(M, M'),$$

il vient

$$\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma;$$

et cette dernière formule permet de trouver l'angle de deux distances quelconques issues de O.

Rapportée à trois diamètres rectangulaires, la sphère réelle, imaginaire ou mixte se transforme, par le changement de mode de ses z, en un hyperboloïde équilatère de même rayon; et, si l'équation de l'une est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

celle de l'autre est

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2.$$

Tout segment rectiligne mené du centre de l'hyperboloïde équilatère à l'un de ses points conserve le nom de *vectrice*.

Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M de l'espace étant

$$x = OA = a, \qquad y = AB = b, \qquad z = BM = c$$

(*fig.* 86), la distance OM de l'origine à ce point est, comme on sait, donnée par la formule

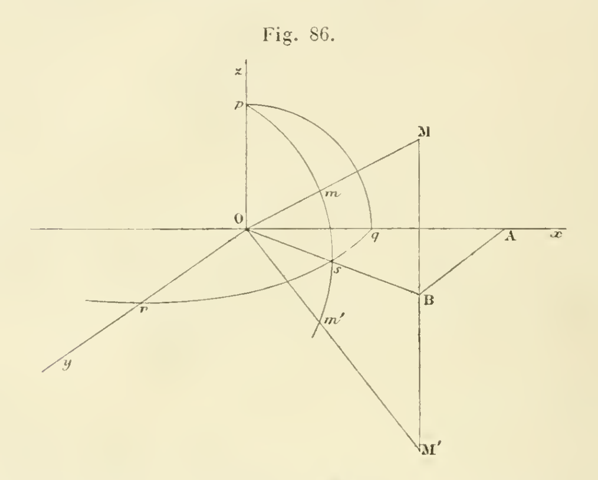
$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La direction OM est fournie par les angles α, β, γ, qu'elle fait avec les axes. Mais on peut la déterminer encore d'une autre façon.

En effet, la sphère de centre O et de rayon $Oq = 1$, coupant OM en m, Oz en p, et les planes xz, xy, zOM, suivant les grands cercles pq, qr, ps, il suffit de connaître la *longitude* $qOs = \lambda$ et la *latitude* $sOm = \theta$ du point M pour en conclure la direction OM.

Dès qu'on multiplie $BM = c$ par i, le point M se trans-

Fig. 86.



forme en un point imaginaire (M, M') et le segment rectiligne OM en une vectrice O(M, M') dont le module est

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}\\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - \overline{ci}^2}\\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\end{aligned}$$

Comme le point (M, M') ne cesse pas d'avoir pour longitude λ et que sa latitude devient $sO(m, m') = \theta i$, la vectrice O(M, M') est déterminée, d'un côté, par cette longitude et de l'autre par la relation

$$\begin{aligned}O(M, M') &= OB + BM\,i\\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta).\end{aligned}$$

La vectrice unité $O(m, m')$ a de même pour longitude λ et pour mesure

$$O(m, m') = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Il est bon d'ajouter que, lorsque la distance Om devient la vectrice $O(m, m')$, l'angle qOm se transforme en un logarithme $qO(m, m')$ et que celui-ci peut être considéré comme la somme $\lambda + \theta i$ de la longitude et de la latitude du point (m, m').

L'addition des vectrices de l'espace consiste à les composer cinématiquement comme on l'a fait pour les vectrices coplanaires.

Le produit de deux vectrices de l'espace s'obtient en effectuant la somme de leurs longitudes et celle de leurs latitudes, puis en affectant celle-ci du produit de leurs modules.

Si l'on rapporte l'hyperboloïde équilatère non plus à ses axes, mais à trois diamètres conjugués quelconques, les conclusions précédentes n'en subsistent pas moins. Les propriétés des brisées rectangles s'étendent donc aux brisées obliques et les vectrices qui répondent aux unes comme aux autres sont susceptibles des mêmes opérations.

Dans toute expression de la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, le géomètre anglais Hamilton voit deux parties entièrement distinctes, l'une algébrique $\rho\cos\theta$, l'autre purement symbolique $i\rho\sin\theta$. Il substitue d'ailleurs à cette dernière le trinôme $ai + bj + ck$, formé d'une part des constantes a, b, c, d'autre part des symboles i, j, k, assujettis à certaines règles conventionnelle, set crée de la sorte une Algèbre symbolique n'offrant plus, du moins en apparence, que des analogies lointaines avec la science de l'étendue.

Je vais essayer de prouver que la manière de procéder d'Hamilton se rattache directement à la Géométrie cartésienne.

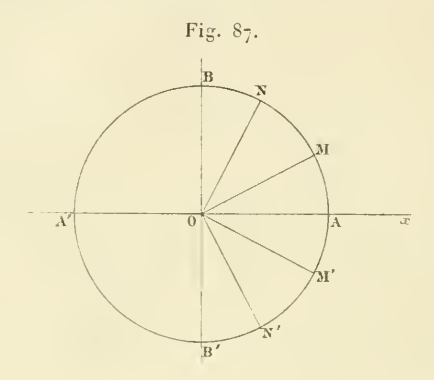
Mais, pour ne pas modifier la signification précise que

j'attache à la lettre i, je remplacerai, dans ce qui va suivre, les variables i, j, k, d'Hamilton, par les variables j, k, l.

Soit d'abord $OA = 1$ (*fig.* 87) le rayon d'une hyperbole équilatère coupant en (B, B') l'axe Oy perpendiculaire à OA.

Lorsque le point A, devenant imaginaire, décrit la branche circulaire A(B, B') de l'hyperbole proposée, le segment OA

Fig. 87.



se transforme successivement en O(M, M'). O(N, N'), puis, enfin, en O(B, B'). Or, de même que le produit des vectrices O(M, M'), O(N, N') s'obtient en faisant la somme de leurs logarithmes, de même le produit de OA par O(B, B') a pour logarithme $o + \frac{\pi}{2} i$ et par suite égale O(B, B'). On voit pareillement que le produit de OA par $\overline{O(B, B')}^2$ ayant pour logarithme $o + \pi i$ n'est autre que $OA' = -1$.

Observons enfin que les considérations précédentes s'appliquent encore au cas où, l'axe Oy étant quelconque, la circonférence A(B, B') se transforme en une ellipse hyperbolique.

Cela posé, soient $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ (*fig.* 88) trois axes ayant O pour origine et que, pour plus de simplicité, nous supposerons rectangulaires.

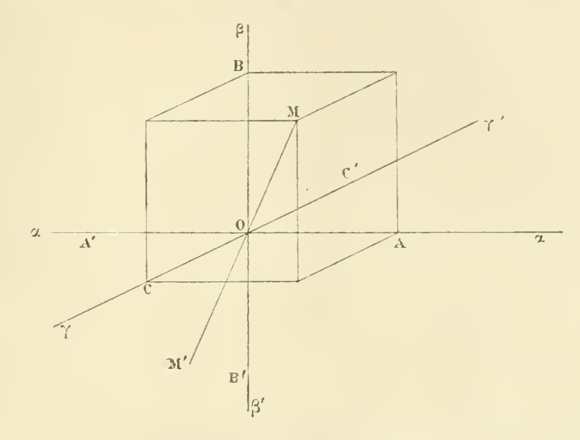
Portons respectivement sur chacun d'eux les segments

droits

$$OA = OB = OC = 1, \qquad O(A, A') = O(B, B') = O(C, C') = i.$$

Puis, observons que les segments OA, O(A, A'), bien qu'étant de modes contraires, peuvent se représenter par une même

Fig. 88.



variable j, et désignons pareillement OB, O(B, B'), par k; OC, O(C, C') par l.

D'après ce qu'on a dit plus haut, le produit de OA par O(B, B') est

$$jk = O(B, B'),$$

et ce produit peut s'obtenir en remplaçant OA par O(A, A'), puis en faisant tourner ce dernier segment dans le sens direct, pour un observateur ayant les pieds sur le plan $\alpha\beta$ et la tête en γ. De même, en faisant tourner O(B, B') d'un quadrant dans le sens direct pour un observateur ayant les pieds sur $\beta\gamma$ et la tête en α, on obtient le produit de OB par O(C, C'), et ce produit n'est autre que O(C, C') $= l$. Mais O(C, C') = O(B, B'). Rien ne s'oppose donc à ce qu'on remplace le produit des segments OA, O(B, B') par le seg-

ment $O(C, C')$ perpendiculaire à leur plan et qu'on écrive, par suite,

$$jk = l.$$

D'un autre côté, si l'on fait momentanément abstraction du signe des coordonnées, il est clair que, pour un observateur ayant les pieds sur $\alpha\beta$ et la tête en γ', la multiplication de OB par $O(A, A')$ donne

$$kj = O(A, A'),$$

et que, pour ce même observateur ayant les pieds sur $\alpha\gamma$ et la tête en β, le produit de OA par $O(C', C)$ est $O(C', C) = O(A, A')$. Or, en restituant aux coordonnées leurs signes, il vient

$$O(C', C) = -O(C, C') = -l.$$

Donc

$$kj = -l$$

ou

$$-kj = l.$$

Enfin, lorsqu'on multiplie OA par $\overline{O(B, B')}^2 = k^2$, il vient

$$jk^2 = OA' = -OA,$$

d'où

$$k^2 = -1.$$

Il est bon d'ajouter que le produit de $O(A, A')$ par $O(A, A')$, par exemple, peut aussi se représenter par $j.j = j^2$: ce qui revient à considérer le premier facteur j comme exprimant l'unité imaginaire.

Des considérations précédentes il résulte qu'on a les relations

$$jk = -kj = l,$$
$$kl = -lk = j,$$
$$lj = -jl = k,$$
$$j^2 = k^2 = l^2 = -1,$$

ce qui s'accorde de tous points avec les conventions d'Hamilton.

Représentons maintenant par $j + k + l$ la diagonale OM du cube construit sur OA, OB, OC. Puis multiplions j par k, k par l, l par j. La somme des produits partiels ainsi obtenus est

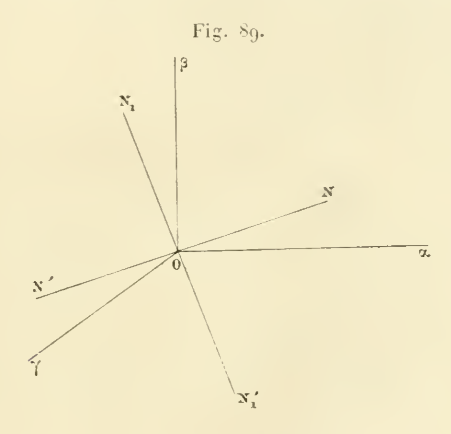
$$jk + kl + lj = l + j + k.$$

Or, le résultat de ces multiplications partielles est évidemment de remplacer OA par O(C, C'), OB par O(A, A'), OC par O(B, B'), et, par suite, OM par O(M, M'). Donc

$$l + j + k = \mathrm{O}(\mathrm{M}, \mathrm{M}').$$

Pour nous conformer aux définitions d'Hamilton, appelons *vecteur* tout segment droit OM partant de l'origine du système $\mathrm{O}\alpha\beta\gamma$ et *vecteur-unité* celui dont les composantes sont

Fig. 89.



égales à l'unité de longueur. Les variables j, k, l représentent des vecteurs-unités dirigés suivant les axes.

Les coordonnées relatives au système $\mathrm{O}\alpha\beta\gamma$ d'un point réel N de l'espace étant b, c, d (*fig.* 89), le vecteur ON peut s'écrire

$$\mathrm{ON} = bj + ck + dl;$$

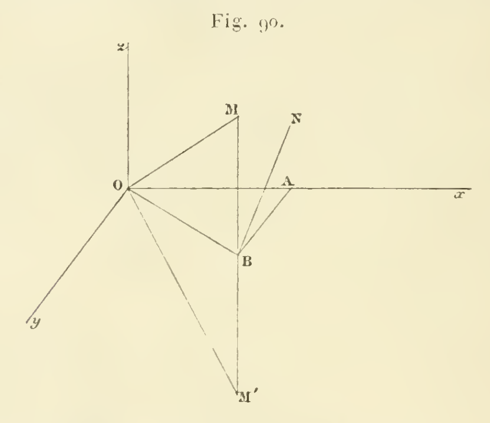
et les multiplications partielles dont on vient de parler amènent pour ce vecteur un changement de mode analogue à celui du vecteur OM de la figure précédente. Mais ce nouveau changement de mode ne s'effectue plus suivant la direction ON, à moins qu'on ne suppose $b = c = d$.

Dans tout autre cas, le vecteur réel ON se transforme en un vecteur imaginaire $O(N_1, N'_1)$ donné par la formule

$$bl + cj + dk = O(N_1, N'_1).$$

Cela posé, les coordonnées d'un point réel M (*fig.* 90) par

Fig. 90.



rapport au système rectangulaire $Oxyz$ étant

$$x = OA, \qquad y = AB, \qquad z = BM,$$

s'agit-il de transformer en vectrice la distance OM?

Au lieu de multiplier immédiatement BM par i, ce qui donnerait la vectrice

$$O(M, M') = OB + B(M, M'),$$

on peut mener par le point B trois *axes secondaires* indépendants du système $Oxyz$, prendre dans une direction convenable $BN = BM$, écrire ensuite

$$BN = bj + ck + dl,$$

et finalement en conclure

$$B(M, M') = bl + cj + dk.$$

D'où il suit qu'en désignant OB par a, il vient

$$O(M, M') = a + bl + cj + dk.$$

Les expressions de ce genre ont reçu, du nombre de leurs termes, le nom de *quaternions*.

Lorsque deux vectrices rapportées à un système rectangulaire passant par leur origine ont leurs axes secondaires parallèles chacun à chacun, elles s'expriment dans des quaternions de la forme

$$p = a + bj + ck + dl,$$
$$q = a' + m(bj + ck + dl),$$

le coefficient m étant un nombre réel. Or, Hamilton a prouvé (¹) que ces formules peuvent respectivement s'écrire

$$p = \rho(\cos\theta + \alpha \sin\theta),$$
$$q = \rho'(\cos\theta' + \alpha \sin\theta');$$

que leur produit est

$$pq = \rho\rho' \{\cos(\theta + \theta') + \alpha \sin(\theta + \theta')\}$$

et que rien n'empêche d'identifier α avec i. Ce qui s'accorde avec la règle donnée plus haut par le produit de deux vectrices.

Hamilton démontre ensuite que le produit, le quotient de deux vecteurs sont autant de quaternions, puis il assigne à ces expressions symboliques des interprétations qui peuvent être fécondes, mais qui sortent du cadre que je me suis tracé. L'essentiel est d'avoir concilié la doctrine des quaternions avec celle des vectrices telle que je l'ai présentée.

Conduit, comme je l'ai dit, par l'analyse aux relations

(¹) ALLÉGRET, *Thèse*. Paris, 1862.

conventionnelles que nous venons d'étudier, Hamilton est obligé de recourir à des considérations philosophiques d'un ordre assez élevé pour établir que le rapport de deux vecteurs doit être un quaternion. Je crois avoir montré que la méthode prudente et sûre de Descartes l'eût mené plus directement au but. Quoi qu'il en soit, sa manière de procéder n'a pas laissé de rencontrer beaucoup d'admirateurs, et l'un d'eux, M. Tait, se prononce assez nettement sur ce point.

Les propriétés des symboles qui se rapportent aux quaternions, dit-il, nous rappellent les symboles électifs de la logique, tels qu'ils sont donnés dans le traité admirable de Boole (sur les lois de la pensée). La similitude frappante de ces deux systèmes de symboles, types de procédés qui sont au fond les mêmes, nous suggère la remarque qu'après tout il n'y a qu'une science unique de l'Analyse mathématique ayant diverses branches, mais employant dans chacune d'elles les mêmes procédés. Par l'une de ces branches, cette science nous dévoile les mystères de la Géométrie de position hors de la portée du raisonnement géométrique ordinaire; par l'autre, elle permet au logicien d'arriver à des vérités de déduction auxquelles il n'aurait jamais pu atteindre sans le secours de l'instrument des formules (1).

Adopter sans réserve une pareille conclusion, ce serait plus que jamais faire de l'Algèbre « un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive. » Descartes a montré le premier qu'on peut déjà fonder en partie la science des nombres sur la considération des droites, du sens qu'elles affectent et des opérations qu'elles comportent. Je pense avoir, sous ce rapport, complété l'œuvre du maître. Ma tâche est donc remplie.

---

(1) TAIT, *Traité élémentaire des quaternions*, p. 81. Traduction de Plarr. 2 vol. in-8; 1882-1884 (Paris, Gauthier-Villars).

CHAPITRE VI.

CONCLUSION.

Un rapide coup d'œil jeté sur les questions que je viens d'aborder ou qui s'y rattachent me tiendra lieu de conclusion.

La Géométrie et l'Algèbre ont entre elles des relations nécessaires sur lesquelles il importe d'être fixé.

Faut-il ériger en principe les vues de Pythagore sur les nombres, puis essayer d'y rattacher les vérités géométriques ?

Faut-il, au contraire, suivre la voie tracée par Descartes et déduire les éléments d'Algèbre des premières données de la Géométrie pure?

De ces deux méthodes, la seconde semble être la plus rationnelle.

En effet, si peu qu'elle interroge l'expérience, la Géométrie n'en est pas moins une science d'observation. Elle considère les corps, leurs parois, leurs arêtes, afin d'en abstraire les solides, les surfaces et les lignes ; puis elle commence par étudier ces figures et finit par les mesurer pour en faciliter la comparaison. Descartes est donc autorisé par là même à fonder l'Algèbre sur la considération des droites et des opérations qu'elles comportent. Mais ce qui fait surtout le mérite de sa méthode, c'est qu'elle se guide uniquement sur les allures de la grandeur continue pour en conclure toutes les propriétés du nombre et les lois qui le

régissent ; tandis qu'en suivant la voie contraire, on est bien vite réduit à ne raisonner que sur de purs symboles.

Autant qu'on en peut juger par cette remarque à peine ébauchée :

La nature s'imite... les nombres imitent l'espace qui sont de nature si différente [1].

Pascal n'approfondit pas la question qui nous occupe.

Mais Cauchy montre sa prédilection pour les idées pythagoriciennes lorsqu'il traite du même sujet en ces termes :

On pourrait dire que les points mathématiques, les distances, les surfaces et les volumes subsistent à la manière des nombres. Ainsi, une distance est réalisée par la création de deux atomes, comme le nombre 5 peut être réalisé par la création de cinq objets divers et les relations nécessaires qui subsistent entre les distances mutuelles de certains points peuvent elles-mêmes être comparées aux relations nécessaires qui subsistent entre certains nombres. Ainsi, par exemple, si en portant à la suite les unes des autres et à partir d'un point donné, dans trois directions perpendiculaires entre elles, trois longueurs dont l'une soit l'équivalent et chacune des deux autres le double d'une longueur donnée, on détermine un second point dont la distance au premier est triple de la longueur dont il s'agit, cela tient simplement à ce que la somme faite des carrés des nombres 1, 2 et 2, est elle-même le carré du nombre 3. On prouverait de la même manière que toutes les propriétés des lignes, des surfaces, des volumes, peuvent être considérées comme les propriétés des nombres et c'est en développant cette idée que Descartes a créé une science nouvelle, savoir : l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* [2].

Ai-je besoin de rappeler qu'après mûr examen de l'œuvre cartésienne, c'est le contre-pied de cette conclusion qu'il faut prendre.

Au surplus, Cauchy ne se rallie sans doute aux idées py-

---

(1) *Pensées*, édition Faugère.

(2) Cauchy (A.). *Sept leçons de Physique générale*, publiées par M. l'abbé Moigno (Paris, Gauthier-Villars).

thagoriciennes que pour mieux faire accepter les purs symboles de l'Algèbre et leur interprétation géométrique,

Mais, au lieu d'affubler ainsi des êtres de raison de toutes les propriétés du nombre, Descartes ne laisse pas de frayer encore la route à ceux qui viendront après lui.

S'agit-il, en effet, de fixer sans ambiguïté possible la position des divers points de l'espace, il assigne deux sens contraires aux droites qui leur servent de coordonnées et marque des signes + ou — les valeurs absolues de ces droites. Procède-t-il en outre à la résolution graphique d'une équation de degré quelconque, il a soin de constater que l'opposition de sens des racines trouvées s'accorde constamment avec l'opposition de signes de leurs valeurs numériques.

Bref, il est amené de la sorte à doter les droites absolues de deux manières d'être inconnues des anciens; puis à mesurer les nouvelles droites en tenant compte à la fois de leur grandeur et de leur sens. Or, l'innovation a son prix, puisqu'il suffisait de définir les opérations dont ces mêmes droites sont susceptibles, pour en déduire la théorie des nombres de signes contraires.

Reconnaissons toutefois que cette dernière considération semble échapper au grand novateur et qu'il n'étend pas sa méthode aux expressions imaginaires.

Après lui, l'interprétation des purs symboles de l'Algèbre reprend faveur. La doctrine des quantités géométriques n'a pas d'autre objet. Mais, bien qu'elle gratifie la droite absolue d'une nouvelle manière d'être, la direction, elle ne tarde pas à se voir environnée d'obstacles qu'elle est impuissante à franchir. Quant à la méthode cartésienne, elle n'a qu'à s'appuyer sur des conceptions plus générales que celles de Wallis ou d'Argand pour être en mesure de résoudre les grands problèmes qui nous occupent.

C'est ainsi qu'en assignant aux éléments des figures deux nouvelles manières d'être, collectivement appelées modes

contraires, je parviens, d'une part, à créer les nombres imaginaires au même titre que les nombres réels, puis à démontrer toutes les règles du calcul algébrique; d'autre part, à généraliser l'Analyse ancienne et celle de Descartes pour en former la Géométrie supérieure. D'où il suit que la science de l'étendue et celle des nombres gagnent toutes deux à se prêter un mutuel secours et que la réforme cartésienne des Mathématiques pures se trouve dès lors accomplie.

Peut-être, est-ce en désespoir de cause et pour n'avoir pu déchiffrer les énigmes de l'Algèbre que Von Staudt s'est proposé d'affranchir la Géométrie supérieure ou de position de toute idée de nombre. Que sa méthode, en partie fondée sur des rapprochements entre les figures planes et celles de l'espace, fournisse de précieux moyens d'investigation, nul ne saurait en disconvenir. Mais qu'elle suffise pour dissiper tous les mystères de la Géométrie de position, personne encore n'en a fourni la preuve. L'œuvre de Von Staudt n'a donc pas l'importance qu'on voudrait lui donner. Voici du reste ce qu'en pense un compatriote du géomètre allemand.

Cette œuvre, dit Hankel, classique dans sa singularité, est une grande tentative en vue de soumettre la nature, dont l'essence est de se manifester sous mille formes variées, à l'uniformité d'un schématisme abstrait et systématique. Une telle tentative n'était possible qu'en Allemagne, pays des méthodes scolastiques, et nous pouvons ajouter, de la pédanterie scientifique. Certes, les Français n'ont pas moins fait que les Allemands pour les sciences exactes; mais ils prennent leurs moyens d'investigation partout où ils les trouvent; ils ne sacrifient pas l'évidence au système, la facilité des recherches à la pureté des méthodes (1).

Ces réflexions sont marquées au coin du bon sens. Loin de mettre la vérité dans tout son jour, les systèmes ne contribuent guère qu'à l'obscurcir. N'est-ce pas de la tendance à

---

(1) FAVARO, *Géométrie de Position*.

créer l'Algèbre de toutes pièces, sans lui donner pour base les faits d'observation les plus simples, que sont nés avec leurs mystères l'Algorithme du moyen-âge et l'*Ars magna* de la Renaissance, sources de nos traités actuels de Mathématiques? N'est-ce pas aussi pour avoir adopté les vues étroites des anciens que le génie d'un Carnot ou d'un Poncelet n'a pu dégager la Géométrie de position des nuages qui l'enveloppaient encore? Bien que se rattachant à la réforme cartésienne, l'œuvre de Von Staudt n'est pas moins exclusive que les précédentes et rien ne prouve qu'elle soit plus parfaite.

Il est d'ailleurs un moyen rationnel et relativement simple d'affranchir les Mathématiques pures de leurs dernières entraves : c'est, comme je l'ai fait voir, d'établir entre les éléments des figures tous les rapports de grandeur et de situation qu'ils comportent, puis d'exprimer ces rapports à l'aide des nombres de modes contraires. D'où la possibilité d'émanciper à la fois la Géométrie et l'Algèbre.

Aussi bien, les deux sciences ont trop d'affinités mutuelles pour ne pas accomplir ensemble leur évolution. C'est donc à ce prix qu'elles semblent devoir un jour briller de tout leur éclat et, comme deux foyers de lumière issus d'une même nébuleuse, éclairer l'homme jusqu'aux limites de son domaine.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE. — POINTS DE MODES QUELCONQUES.

CHAPITRE II.

LIGNE DROITE. — CONIQUES RECTILIGNES.

CHAPITRE III.

COURBES PLANES.

CHAPITRE IV.

AIRES DE MODE QUELCONQUE. — FONCTIONS TRANSCENDANTES.

CHAPITRE V.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

CHAPITRE VI.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

